

Mechanik für Techniker

<http://paranoia.scienceontheweb.net/paranoia> - [mailto:paranoia @ hush.com](mailto:paranoia@hush.com)

22. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Intro	5
1.1	Bewertung	5
2	Kräfte-Beschreibung	6
2.1	Beschreibung von Vektoren	6
2.1.1	in polaren Koordinaten	6
2.1.2	Übung	7
2.1.3	in kartesischen Koordinaten	7
2.1.4	Übung	8
3	Umwandlung	9
3.1	von polar nach kartesisch	9
3.1.1	Was bitte ist ein Sinus?	9
3.2	Übung	9
3.3	von kartesisch nach polar	10
3.4	Übung	10
3.5	Zusammenfassung	10
3.6	Übung	11
4	Addition und Subtraktion von Vektoren	12
4.1	Grafisch (1)	12
4.2	Grafisch (2)	12
4.3	In kart. Koordinaten	12
4.4	In polaren Koordinaten	12
4.5	Subtraktion	12
4.6	Übungen	14
5	Zerlegen von Kräften entlang von Wirklinien	15
5.1	Grafisch	15
5.2	Halbgrafisch, mit dem Sinussatz	15
5.3	Determinantenverfahren (optional)	15
5.4	Übungen	16
5.4.1	Sinussatz und Cosinussatz	16
5.4.2	Zerl1	16

5.4.3	Zerl2	16
5.4.4	Massepunkt am Hang	16
5.4.5	Kranausleger	17
6	Zentrales Kräftesystem und Gleichgewicht	18
6.1	Zentrales Kräftesystem	18
6.2	Gleichgewicht	18
6.2.1	Wozu Kräfte zerlegen?	18
6.2.2	Wie herum?	18
6.3	Satz von der Ruhe	18
6.4	Übung: Spielzeug	19
7	Freischneiden	20
7.1	Übung	23
7.1.1	Die Teufelsschaukel	23
7.1.2	Kugel an Wand	23
7.1.3	Kugel auf schiefer Ebene	23
7.1.4	3 Rollen	24
7.1.5	Zylinder zwischen Ebenen	24
7.1.6	Lineares Gleichungssystem nach Determinantenverfahren	24
7.1.7	Ohne und mit Wind	25
7.1.8	Elefant an Wand	25
8	Drehmoment	26
8.1	Übung Drehmoment	27
8.1.1	Seilrolle	27
8.1.2	Fahrrad	27
8.1.3	Kräne	27
8.1.4	Biegebalken	27
9	Stabwerke	28
10	Lineare Superposition	28
10.1	Übungen Stabwerk	29
11	Ritter'scher Schnitt	30
11.1	Vorübung: Ein paar mathematische Betrachtungen	30
11.2	Kochrezept	31
11.3	Übungen	32
12	Cremona-Plan [optional]	33
12.1	Einstiegsbeispiel	33
12.2	Schreibweise	33
12.3	Durchrechnen	33
12.4	Manöverkritik: Startpunkt	34
12.5	Manöverkritik: Mehr Belastungskräfte	34
12.6	Übung Cremona [optional]	35

13 Festigkeitslehre	36
13.1 Normalspannung	36
13.2 Normaldehnung	36
13.3 Elastizitätsmodul	36
13.4 Übung Spannung und Dehnung	37
13.5 Fundamentalgleichung der Konstruktionstechnik	37
14 Wärmedehnung - to be written (optional)	38
15 Querkraft und Schubspannung	39
15.1 Scherung	39
15.2 Schubmodul	39
15.3 Wo Normalspannung ist... (optional)	39
16 Biegung	41
17 Biegespannung und Widerstandsmoment	42
17.1 Übung	42
18 Biegemomenten-Linie durch Lineare Superposition	43
18.1 Kochrezept	43
18.2 Biegemoment-Grundfall 1 von 2	43
18.3 Biegemoment-Grundfall 2 von 2	43
19 Biegemomenten-Linie durch Freischneiden	44
19.1 Übung	44
19.2 Der Trick mit den Querkraftflächen	44
19.3 Lösung zur Übung	45
19.4 Übung Biegemomenten-Linien	46
20 Kerbwirkung	47
20.1 Wiederholung	47
20.2 Fundamentalgleichung der Biegespannung	47
20.3 Kerbfaktoren	47
20.4 Übung: Achse mit Kerbwirkung	48
20.5 W_b	48
21 Belastungsarten	49
21.1 Dauerfestigkeit	49
21.2 Übung: Belastung einer Welle	50
21.3 Übung: Wellenberechnung	50
22 Torsion	51
22.1 Übung: Tordierte Welle	51
23 Kräfte im Zahnradtrieb	52
23.1 Umfangskräfte	52
23.2 Normalkräfte	52

23.3 Übung Zahnräder 1	53
23.3.1 Radsatz	53
23.3.2 Hinterrad	53
23.3.3 Fahrrad	53
24 Kombinierte Belastung	54
24.1 Addieren von Normal- und Schubspannung	54
24.2 Übung: Vorgelegewelle	54
25 Berechnung einer Vorgelegewelle	56
25.1 Getriebe	56
25.2 V-Welle	56
25.3 Verschiedenste techn. Daten	56
25.4 Vorgehen	57
26 Reibung - to be written	58
26.1 μ and μ_0	58
26.1.1 Quantitative Bestimmung der Reibkraft	58
26.2 Reibkegel	59
26.3 Übung: Hausmeister	59
27 Kreisbeschleunigung (optional)	60
27.1 Weltraum	60
27.2 Übungen Kreis	62
27.2.1 Karussell	62
27.2.2 Autobahn	62
27.2.3 Schaukel	62
27.3 Geostationäre Bahn	63

Disclaimer

Wissen ist zum Teilen da. Ich teile mein Wissen mit Ihnen, lieber Kollege.

Ich bin aber nicht perfekt. Unter paranoia@hush.com nehme ich dankbar Ihre Verbesserungsvorschläge entgegen.

*

Legal Blurb: Alle Informationen in diesem Dokument sind falsch, unvollständig, irreführend, irrelevant und / oder funktionieren einfach nicht.

Wenn Sie es trotzdem benutzen, und es geht dabei etwas kaputt, ist das Ihr Problem, nicht meins.

*

Bitte teilen Sie meine Web-Adresse nicht Ihren Schülern mit.

1 Intro

Mechanik umfaßt auch Elemente von Mathematik, Physik und Werkstofftechnik. Eine frühzeitige Verknüpfung mit Konstruktionstechnik ist anzustreben.

Aufgaben sollten in Kleingruppen zur Förderung der Teamfähigkeit bearbeitet werden.

Lernfeldübergreifende Problemstellungen sollen Projektarbeit fördern.

Auf praktisch alle Bauteile wirken Kräfte, die Belastungen (namens Spannungen) im Bauteil hervorrufen.

Die Spannungen sind häufig verschieden an verschiedenen Stellen des Bauteils.

Die ertragbaren Spannungen sind abhängig von

- Werkstoff,
- den Umgebungsbedingungen (zB Temperatur, aggressive Medien, Vibrationen)
- und der Geometrie (Gewinde, Absätze, Kerben).

Wir werden am Ende des Jahres die Spannungen an den gefährdeten Querschnitten berechnen können.

Damit können wir aussagen, ob ein Bauteil den gegebenen Belastungen standhält oder nicht - ohne es zu produzieren und auszuprobieren.

Wir treffen dabei folgende Vereinfachungen:

- Wir rechnen nur den 2-dimensionalen Fall.
- Wir rechnen mit bekannten Belastungen - bekannt nach Größe, Richtung, Art (ruhend, wechselnd, schwingend).

In der Realität ist das nicht immer gegeben - da muß man dann schätzen.

1.1 Bewertung

1 Klausur pro Semester - 75 %

1 mündliche Note pro Semester - 25 %

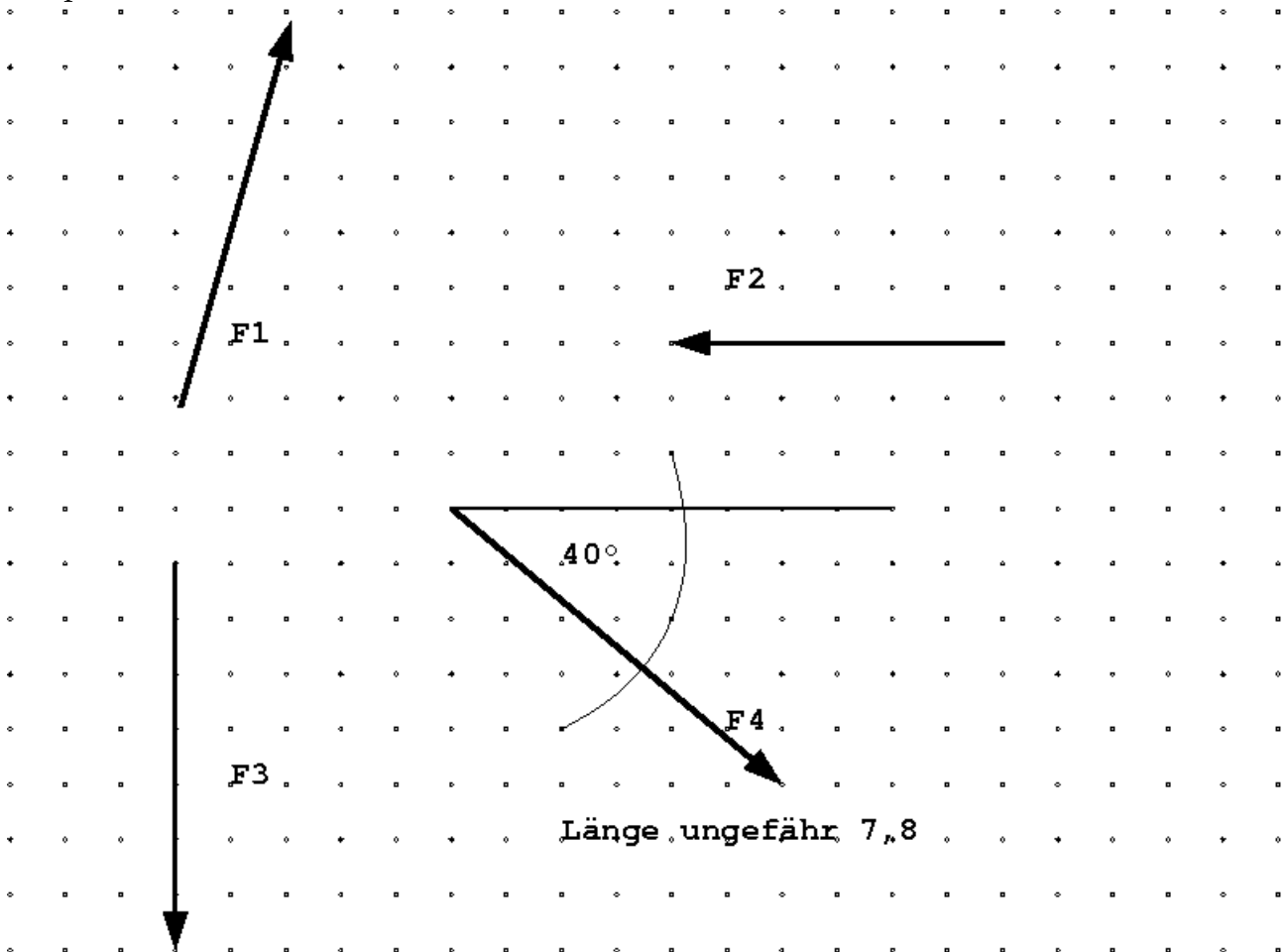
2 Kräfte-Beschreibung

Auf unsere Bauteile wirken Kräfte.

Kräfte haben einen Betrag und eine Richtung. Deshalb sind sie *Vektoren*. Das macht das Darstellen und Rechnen mit ihnen interessanter als mit Skalaren (einfachen Zahlen bzw. Größen).

2.1 Beschreibung von Vektoren

Beispiel:



2.1.1 in polaren Koordinaten

Polare Koordinaten geben Betrag und Lagewinkel des Vektors an.

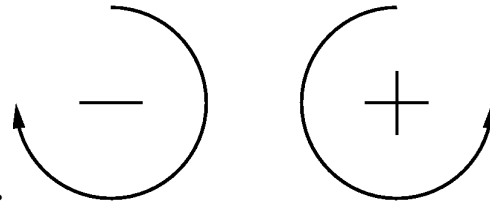
Der Betrag ist die Länge.

Der Lagewinkel ist die Abweichung in Grad gegen eine vorgegebene Richtung.

Diese vorgegebene Richtung ist eigentlich völlig egal, also nehmen wir immer *eine horizontale Linie, beginnend gegenüber dem Pfeil, nach rechts*.

Außerdem muß man noch angeben, ob der Vektor linksherum oder rechtsherum gedreht ist.

Im Uhrzeigersinn ist negativ.



Gegen den Uhrzeigersinn ist positiv.

Schreiben Sie sie so: $\vec{F} = (\text{Betrag}; \text{Winkel})$

2.1.2 Übung

Nehmen Sie 1 Teilstrich = 1cm = 2 Kästchen auf kariertem Papier.

Zeichnen Sie die Kräfte F1 bis F4 ab, und beschreiben Sie sie in polaren Koordinaten.

2.1.3 in kartesischen Koordinaten

Das Wort "kartesisch" geht zurück auf den Mathematiker und Philosoph Rene Descartes (18.Jahrhundert). Mit der Bezeichnung ehrt man ihn.

Vektorrechnung gab es schon vorher, aber sie war sicher mühsam.

Zunächst brauchen wir ein Kartesisches Koordinatensystem. Üblicherweise zeigt die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben. (Kartesische Koordinatensysteme sind rechtwinklig.)

Dann brauchen wir eine Skalierung. Nehmen Sie 1 Teilstrich = 1cm = 2 Kästchen auf kariertem Papier. Die meisten Übungen sind so, daß sie auf DIN A4 quer passen (21cm - 2cm - 1cm).

WO Sie das Koordinatensystem hinzeichnen, ist egal. Links unten stört es nicht.

*

Ein Vektor wird im Kartesischen Koordinatensystem mit 2 Komponenten beschrieben, die übereinanderstehen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

Wenn der Vektor u.a. nach rechts zeigt, ist die x-Komponente positiv.

Wenn der Vektor weder nach rechts noch nach links zeigt, ist die x-Komponente 0.

Wenn der Vektor u.a. nach links zeigt, ist die x-Komponente negativ.

Wenn der Vektor u.a. nach oben zeigt, ist die y-Komponente positiv.

Wenn der Vektor weder nach oben noch nach unten zeigt, ist die y-Komponente 0.

Wenn der Vektor u.a. nach unten zeigt, ist die y-Komponente negativ.

2.1.4 Übung

Beschreiben Sie die Kräfte F1 bis F4 in kartesischen Koordinaten.

3 Umwandlung

3.1 von polar nach kartesisch

Wenn eine Kraft gegeben ist als $(F; \varphi)$ (also als Betrag und Winkel), dann errechnet man die kartesische Darstellung als

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F * \cos \varphi \\ F * \sin \varphi \end{pmatrix}$$

3.1.1 Was bitte ist ein Sinus?

Funktionen, die niemand außer unserem Taschenrechner kennt, lernen wir kennen, indem wir eine Wertetabelle anlegen.

Legen Sie eine Tabelle an, und berechnen Sie zu jedem φ den Sinus und den Cosinus. Lassen Sie Ihren Taschenrechner dabei auf DEG stehen. Nehmen Sie drei kaufmännisch gerundete Nachkommastellen.

phi (°)	-30	0	30	45	60	90	120	135	150	180	225	270	315	360
sin														
cos														

Nehmen Sie *immer* drei kaufmännisch gerundete Nachkommastellen.

Zeichnen Sie den Sinus und den Cosinus. Nehmen Sie 20° pro cm auf der x-Achse und 5 cm für 1 auf der y-Achse.

Der Sinus ist eine Schwingung, von 0 über 1, 0, -1 wieder nach 0. Er wird nie größer als 1 und nie kleiner als -1.

Er hat Nullstellen bei $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots$

Er ist periodisch auf 360° , d.h. er fängt dort wieder von vorne an.

Der Cosinus ist dem Sinus sehr ähnlich. Er ist nur um -90° (nach links) verschoben.

3.2 Übung

Nehmen Sie die polaren Darstellungen von F1 bis F4, und rechnen Sie sie in kartesische Darstellung um.

3.3 von kartesisch nach polar

Wenn eine Kraft gegeben ist als $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$
dann ist ihr Betrag $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$,
und ihr Lagewinkel $\varphi = \arctan \frac{F_y}{F_x} + 180^\circ$, falls $F_x < 0$.

3.4 Übung

Nehmen Sie die kartesischen Darstellungen von F1 bis F4, und rechnen Sie sie in polare Darstellung um.

3.5 Zusammenfassung

Vektoren, also auch Kräfte, werden in polarer oder kartesischer Schreibweise beschrieben.
Beide Schreibweisen sind eindeutig und lassen sich verlustfrei ineinander umwandeln.
Die häufigsten Fehler sind Vorzeichenfehler.

3.6 Übung

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

F1	2 nach unten, 2 nach rechts
F2	1 nach oben, 3 nach rechts
F3	3 nach links, 1 nach unten
F4	4 nach oben
F5	3 nach links
F6	4 nach oben, 3 nach links
F7	5 lang, zeigt nach rechts oben, 10° zur Horizontalen
F8	5 lang, rechts unten, 40° zur Vertikalen
F9	6 lang, links unten, 20° zur Vertikalen
F10	9 lang, links oben, 30° zur Horizontalen

1. Zeichnen Sie alle Kräfte. Nehmen Sie 1cm pro Längeneinheit.
2. Schreiben Sie \vec{F}_1 bis \vec{F}_6 in Kartesischen Koordinaten.
3. Schreiben Sie \vec{F}_7 bis \vec{F}_{10} in Polaren Koordinaten.
4. Wandeln Sie \vec{F}_1 bis \vec{F}_6 in polare Darstellung um.
5. Wandeln Sie alle polaren Darstellungen, die Sie haben, in kartesische Darstellung um.

4 Addition und Subtraktion von Vektoren

Im folgenden sei $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

4.1 Grafisch (1)

- Zeichne A.
- Zeichne B so, daß Endpunkt von A = Startpunkt von B.
- C ist (Startpunkt A bis Endpunkt B).

4.2 Grafisch (2)

- Zeichne A.
- Zeichne B so, daß Startpunkt von A = Startpunkt von B.
- Zeichne eine Parallele zu A namens PA durch den Endpunkt von B.
- Zeichne eine Parallele zu B namens PB durch den Endpunkt von A.
- C geht vom Schnittpunkt der Vektoren zum Schnittpunkt der Parallelen.

4.3 In kart. Koordinaten

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

4.4 In polaren Koordinaten

Entweder durch Zeichnen. Oder durch Überführen nach kartesischen Koordinaten. Oder nach dem

Cosinussatz: Wenn ein Dreieck die Seiten a , b und c hat und γ der Winkel zwischen a und b ist, dann gilt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

4.5 Subtraktion

Wenn $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$, dann bilde man $-\vec{B}$

- grafisch: durch Herumdrehen von \vec{B} ;
- kartesisch: durch Herumdrehen der Vorzeichen;

- polar: durch Addieren oder Subtrahieren von 180° .

und berechne anschließend $\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B})$.

4.6 Übungen

Bei Kräften 3 Nachkommastellen, bei Winkeln 1 Nachkommastelle.

Nehmen Sie die Kräfte aus der vorigen Übung.

Berechnen und zeichnen Sie mit allen in Frage kommenden Methoden. Beschriften Sie das Ergebnis, und geben Sie es in kart. und polaren Koordinaten an.

a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ b) $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$ c) $\vec{F}_4 + \vec{F}_5$ d) $\vec{F}_7 + \vec{F}_8$

e) $\vec{F}_8 + \vec{F}_9 + \vec{F}_{10}$

f) $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ g) $-\vec{F}_2 - \vec{F}_3$ h) $-\vec{F}_4 - \vec{F}_5$ i) $-\vec{F}_7 - \vec{F}_9$

k) $\vec{F}_8 - \vec{F}_9 + \vec{F}_{10} - \vec{F}_4$

l) Berechnen Sie $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{10}$ mittels einer Tabelle, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.

nr.	betrag	winkel	x-koord	y-koord
1	egal	egal	2.000	-2.000
2	egal	egal	3.000	1.000
usw.				
summe	!!!!	!!!!	?????	?????

5 Zerlegen von Kräften entlang von Wirklinien

Mittlerweile können wir die Summe und die Differenz von Kräften ausrechnen. Das Ergebnis steht aber meistens schräg zu den kraft-aufnehmenden Seilen, Oberflächen, Widerstandsmomenten...

Beispiel: Bagger am Hang

- Die Gewichtskraft zieht nach unten;
- der Hang drückt senkrecht zu seiner Oberfläche;
- das Seil zieht in seiner Längsrichtung.

Also müssen wir lernen, eine vorhandene Kraft \vec{C} in zwei Kräfte \vec{A} und \vec{B} aufzuspalten.

5.1 Grafisch

- Zeichne \vec{C} .
- Zeichne die Wirklinie WA durch den Startpunkt von \vec{C} .
- Zeichne die Wirklinie WB durch den Endpunkt von \vec{C} .
- Bastele ein geschlossenes Krafteck.
- Miß \vec{A} und \vec{B} mit dem Lineal aus.

5.2 Halbgrafisch, mit dem Sinussatz

Sinussatz: Sei ein Dreieck ABC. Dann gilt: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

- Lösen Sie's grafisch.
- Bestimmen Sie die Winkel.
- Berechnen Sie a und b .
- Lesen Sie die richtigen Vorzeichen aus der Zeichnung ab.

5.3 Determinantenverfahren (optional)

Wir suchen A und B im Gleichungssystem

$$\cos \alpha A + \cos \beta B = C \cos \gamma$$

$$\sin \alpha A + \sin \beta B = C \sin \gamma$$

Laut Determinantenverfahren ist

$$D = \cos \alpha * \sin \beta - \sin \alpha * \cos \beta$$

$$A = \frac{C \cos \gamma * \sin \beta - C \sin \gamma * \cos \beta}{D}$$

$$B = \frac{\cos \alpha * C \sin \gamma - \sin \alpha * C \cos \gamma}{D}$$

5.4 Übungen

5.4.1 Sinussatz und Cosinussatz

- Zeichnen Sie mit Lineal und dünnem Stift auf eine halbe DIN A4-Seite ein nicht rechtwinkliges, ungleichschenkliges Dreieck.
- Benennen Sie die Punkte, Seiten und Winkel.
- Messen Sie die Seiten und Winkel.
- Berechnen Sie die Summe aller Winkel.
- Legen Sie eine Tabelle an:

Name	gemessen	gerechnet
a		---
b		---
...		
$\sin(\alpha) / a$		
...		

- Überprüfen Sie mit Ihren Werten den Sinussatz.
- Überprüfen Sie mit Ihren Werten den Cosinussatz.
- Ersetzen Sie im Cosinussatz a durch b, b durch c, c durch a, und überprüfen Sie das Ergebnis mit Ihren Werten.

5.4.2 Zerl1

\vec{C} geht 5 nach oben und 12 zur Seite. \vec{A} geht nach rechts. \vec{B} geht nach unten.
Bestimmen Sie A und B.

5.4.3 Zerl2

\vec{C} geht 5 nach unten. \vec{A} geht von links unten nach rechts oben und schließt mit der Vertikalen einen Winkel von 70° ein. \vec{B} geht von links oben nach rechts unten und schließt mit \vec{A} einen Winkel von 60° ein.

Bestimmen Sie A und B.

5.4.4 Massepunkt am Hang

Auf einem Hang ($\alpha = 20^\circ$) liegt ein Massepunkt ($m = 100\text{kg}$). Damit er nicht davonrutscht, ist ein Seil gespannt ($\beta = 20^\circ$).

Wir interessieren uns ausschließlich für die Kräfte, die auf den Massepunkt wirken.

- Berechnen Sie die Gewichtskraft.
- Berechnen Sie die Hangnormalkraft und die Seilkraft.

5.4.5 Kranausleger

Ein Kranausleger besteht aus zwei Stangen mit den Winkeln 30° und 60° . Daran hängt eine Last, die mit 1 kN nach unten zieht.

- a) Welche Kräfte wirken in den Stangen?
- b) Welche Stange könnte man durch ein Seil ersetzen?

6 Zentrales Kräftesystem und Gleichgewicht

6.1 Zentrales Kräftesystem

Ein Kräftesystem wird Zentral genannt, wenn alle vorhandenen Kräfte auf denselben Punkt zeigen.

Wenn sie das nicht tun, kommen Biegemomente ins Spiel - die kommen aber erst später. Wir werden auch komplexe Konstruktionen, wie zB Stabwerke, mit Hilfe des Zentralen Kräftesystems rechnen, indem wir die interessanten Punkte freischneiden.

Kräfte dürfen beliebig auf ihrer Wirklinie verschoben werden.

6.2 Gleichgewicht

6.2.1 Wozu Kräfte zerlegen?

In der Mechanik interessieren uns die Kräfte, die auf alle Bauteile wirken, damit wir die Bauteile entsprechend auslegen oder die Konstruktion überholen können.

6.2.2 Wie herum?

In den bisherigen Übungen haben wir die Kraft \vec{C} in die beiden Kräfte \vec{A} und \vec{B} zerlegt, so daß galt:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

Bei den folgenden Übungen werden wir ebenfalls Kräfte zerlegen, allerdings mit dem Ziel

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$$

oder

$$\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$$

Anders gesagt, wir werden $-\vec{C}$ in die Komponenten \vec{A} und \vec{B} zerlegen.

6.3 Satz von der Ruhe

Wir werden hierbei davon ausgehen, daß die Konstruktion nicht versagt. Damit ist bekannt:

- die Krafrichtungen;
- daß das gesamte System – und damit auch jedes seiner Teilsysteme – in Ruhe ist.

Ein mechanisches System oder Teilsystem ist in Ruhe, wenn die darauf wirkenden Kräfte sich aufheben:

$$\sum \vec{F} = 0$$

oder (praktikabler) :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

6.4 Übung: Spielzeug

Vier Kinder ziehen an einem Spielzeug.

Anton zieht mit 200N nach Norden. Berta zieht mit 200 N nach Nordwesten. Cäsar zieht nach Süden. Detlev zieht nach Osten. Das Spielzeug rührt sich nicht vom Fleck.

Berechnen Sie die Zugkräfte von Cäsar und Detlev.

Hallo Lehrkraft

An diesem Beispiel kann man wunderbar Lineare Superposition demonstrieren.

7 Freischneiden

1. Zugkräfte sind positiv. Druckkräfte sind negativ. Immer.
2. Wir nehmen unbekannte Kräfte immer als ziehend an. Wenn sie nach dem Ausrechnen negativ sind, sind's halt Druckkräfte.
3. Wenn ich durch ein möglicherweise kraftführendes Teil schneide, muß ich den abgeschnittenen Teil durch eine unbekannte Kraft ersetzen.

Beispiele

- Ein Stück Kreide auf der Handfläche.
Es liegt still, weil Gewichtskraft nach unten zieht und Handkraft nach oben drückt. Sobald ich die Hand wegnehme, wirkt nur noch die Gewichtskraft, und es setzt sich in Richtung Erdmittelpunkt in Bewegung. Man sagt: es fällt herunter.
- Eine Last an einem Seil - ein Stück des Seils - ein Stück Seil zusammen mit der Last - ein Stück Seil zusammen mit dem Deckenhaken und einem Teil der Decke.

Mechanische Seile sind masselos. Stäbe auch.
Seile nehmen nur Zugkräfte in Seilrichtung auf. (Demonstrieren zB mit Kabel vom Overheadprojektor.)
Stäbe nehmen Zug- und Druckkräfte in Stabrichtung auf. (Demonstrieren mit Zeigestab, zB durch Pieksen einer/s Studierenden.)

Die Kräfte an den beiden Schnittpunkten eines Seils/Stabes sind entgegengesetzt gerichtet und gleich groß.
Die beiden Beträge (= Kraftinformation ohne Richtungsinformation) sind gleich groß.
Den Betrag der Kraft von Stab 13 werden wir F_{13} nennen.
Er ist

- positiv \Rightarrow Zugstab.
- = 0 \Rightarrow Nullstab.
- negativ \Rightarrow Druckstab.

- Ein Stab in Fest-Los-Lagerung mit Kraft L , rechts angreifend, ziehend.

**Mechanische Festlager können Kräfte in jeder Richtung aufnehmen.
Für unsere Zwecke ist es praktischer, wenn wir sagen:
Mechanische Festlager können Kräfte in x- UND y-Richtung aufnehmen.
Beim Freischneiden erhält ein Festlager am Punkt A die beiden Kräfte \vec{F}_{Ax} und \vec{F}_{Ay} angeschrieben.**

**Mechanische Loslager können nur Kräfte senkrecht zur Gleit-Richtung aufnehmen.
Ergo: Loslager können nur Kräfte in einer Richtung aufnehmen.
Beim Freischneiden erhält ein Festlager am Punkt B die Kraft \vec{F}_B angeschrieben.**

Dieses Beispiel wirkt SO banal. Durchrechnen des Gesamtsystems sowie der Teilsysteme "rechte Hälfte des Stabes" und "linke Hälfte des Stabes" wird dringend empfohlen. Dabei kann man zB die Vektor-Gleichung

$$\vec{0} = -\vec{F}_{Stab} - \vec{F}_B + \vec{L}$$

auflösen in zwei skalare Gleichungen:

$$0 = -F_{Stab} + 0 + L$$

$$0 = 0 - F_B + 0$$

und damit ergibt sich:

$$F_B = 0$$

$$F_{Stab} = L \Rightarrow \text{Zugstab.}$$

- eine Straßenlampe von 10 kg an zwei Seilen, die unter einem Winkel von 5° nach links und rechts zu ihren Befestigungspunkten laufen.

(Hinweis: $F_{Lampe} = 98,1 \text{ N}$. $F_{Seil} = 98,1 \text{ N} / 2 / \sin(5^\circ) = 562,786 \text{ N}$)

Beim Anschlagen von Lasten an einem Kran dürfen die Ketten oder Seile max. 30° von der Vertikalen abweichen.

- ein dreieckiges stabwerk in fest-los-lagerung mit kraft von links oben
- eine kloppapierrolle, die mit einer schnur an der wand festgemacht ist
- einen flaschenzug. festgemacht an decke - unterrolle - oberrolle - hand

1. Zugkräfte sind positiv. Druckkräfte sind negativ. Immer.
2. Wir nehmen unbekannte Kräfte immer als ziehend an. Wenn sie nach dem Ausrechnen negativ sind, sind's halt Druckkräfte.
3. Wenn ich durch ein möglicherweise kraftführendes Teil schneide, muß ich den abgeschnittenen Teil durch eine unbekannte Kraft ersetzen.

7.1 Übung

Bei allen Aufgaben

- Skizzieren Sie zunächst die Aufgabenstellung.
- Legen Sie neben der Skizze eine Tabelle für die Namen und Beträge der Kräfte an.
- Schneiden Sie sie anschließend frei, und benennen Sie die Kräfte.
- Berechnen Sie die Kräfte. Benutzen Sie dabei Skizzen, Grafische Verfahren, Sinus- und Cosinussatz, Satz von der Ruhe und das Determinantenverfahren.
- Füllen Sie die Tabelle aus.

7.1.1 Die Teufelsschaukel

An der Decke hängen zwei Rollen. Ihre Mittelpunkte sind 12 cm voneinander entfernt. Die Laufräder haben einen Durchmesser von 2cm.

Über die Rollen läuft ein Seil. Links hängt daran m_1 , rechts m_3 .

In der Mitte ist noch ein Seil angeknotet, daran hängt m_2 .

Mechanische Systeme sind perfekt, gewichtslos und reibungsfrei.

1. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ Tafel Schokolade (102g).

Berechnen Sie die Seilkräfte. Finden Sie die Seilwinkel heraus. Zeichnen Sie das System.

2. Wie oben, nur $m_2 = 143g$.
3. Wie oben, nur $m_3 = 143g$.
4. Wie oben, nur $m_2 = m_3 = 153g$.
5. Seil 1 hat einen Winkel von 10° gegen die Horizontale, Seil 3 auch. $m_2 = 102g$. Berechnen Sie m_1 und m_3 .
6. Seil 1 hat einen Winkel von 10° gegen die Vertikale, Seil 3 auch. $m_3 = 102g$. Berechnen Sie m_1 und m_2 .
7. $m_1 = 1$ kg. Winkel $1 = 20^\circ$. Seil1 und Seil3 stehen rechtwinklig aufeinander.

7.1.2 Kugel an Wand

Eine Kugel von 1m Radius und 1 t Gewicht hängt an einer vertikalen Wand.

An der Oberfläche der Kugel ist ein 2 m langes Seil angeschraubt. Das andere Ende des Seils ist an der Wand angeschraubt.

Berechnen Sie die Seilkraft und die Kraft, mit der die Kugel gegen die Wand drückt.

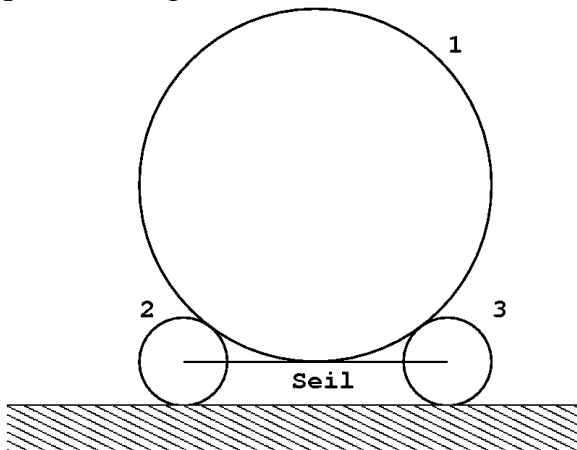
7.1.3 Kugel auf schiefer Ebene

Wie vorher, nur die Wand wird schräg gelegt und schließt nun einen Winkel von 35° mit der Horizontalen ein.

7.1.4 3 Rollen

Eine große Rolle ($R=4m$, $m=1t$) liegt auf zwei kleineren Rollen ($r=1m$). Die unteren beiden Rollen liegen auf dem Boden.

Die beiden Rollen sind durch ein Seil ($l=6m$) verbunden, das jeweils in den Rollenmittelpunkten angebracht ist.



a) Freischneiden. m b) Seilkraft? m b) $l=4m$. Seilkraft?

7.1.5 Zylinder zwischen Ebenen

Ein Zylinder der Masse $m = 100g$ liegt zwischen zwei schrägen Ebenen. Berechnen Sie die Druckkräfte.

- Linke Ebene schließt mit Vertikaler 60° ein, rechte auch.
- Linke Ebene schließt mit Vertikaler 45° ein, rechte auch.
- Linke Ebene schließt mit Vertikaler 20° ein, rechte 30° .

7.1.6 Lineares Gleichungssystem nach Determinantenverfahren

Wenn

$$Ax + By = C$$

$$Dx + Ey = F$$

dann

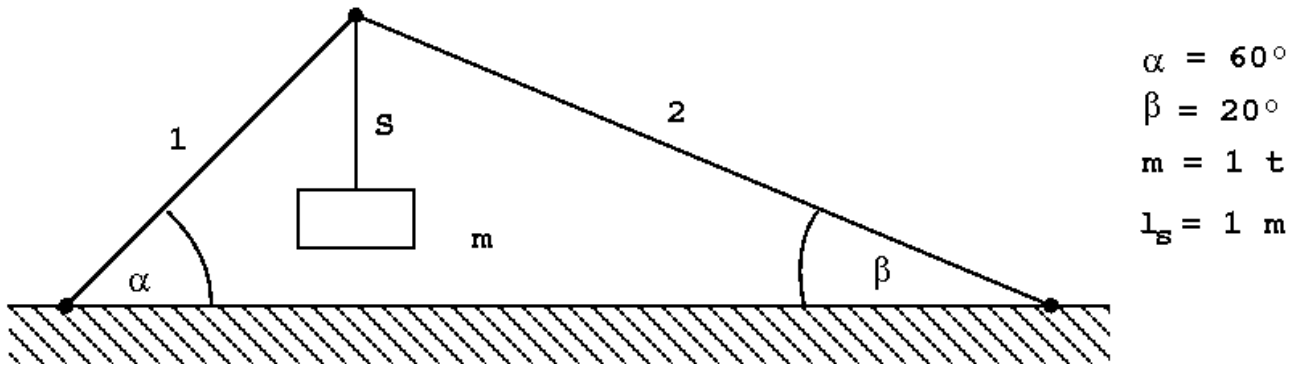
$$x = \frac{CE - BF}{AE - BD}$$

und

$$y = \frac{AF - CD}{AE - BD}$$

- Denken Sie sich zwei Unbekannte x und y aus.
Denken Sie sich 4 Koeffizienten A , B , D und E aus.
- Berechnen Sie C und F .
- Schreiben Sie das Gleichungssystem hin, decken Sie Ihr x und y zu, und berechnen Sie sie.

7.1.7 Ohne und mit Wind



Zwei Stäbe tragen eine Last an einem Seil.

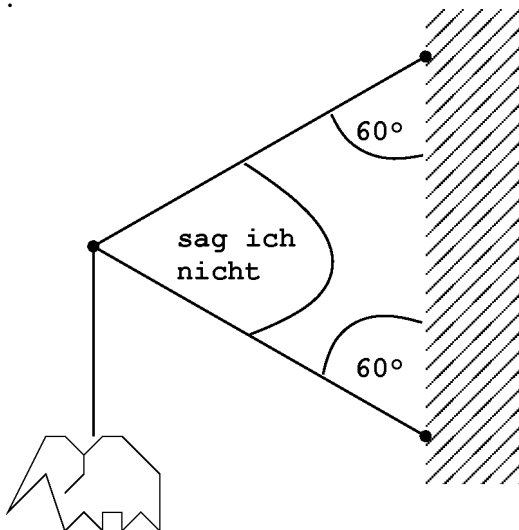
a) Welche Kräfte herrschen bei Windstille in den Stäben?

Plötzlich kommt Wind von links, der auf die Last einen Winddruck von 1 kN ausübt.

b) Wie weit wandert m von seiner derzeitigen Lage weg?

c) Seilkraft?

d) Stabkräfte?



7.1.8 Elefant an Wand

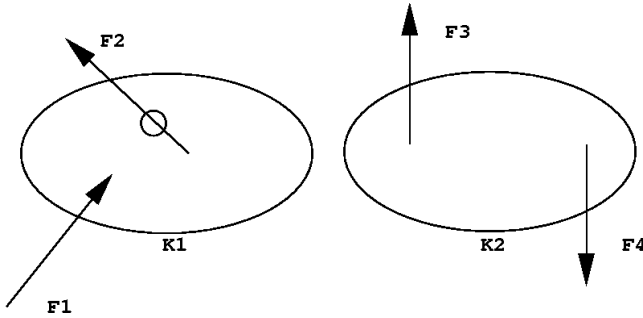
Ein junger, betäubter Elefant ($m=100\text{kg}$) hängt mittels eines Stabes und eines Seiles an der Wand.

Gesucht ist die Seilkraft und die Stabkraft.

8 Drehmoment

In einem zentralen Kräftesystem zeigen alle Kräfte auf einen zentralen Punkt.

Wenn sie das nicht tun, kommen *Drehmomente* ins Spiel.



Von den gezeigten Körpern ist keiner im Gleichgewicht:

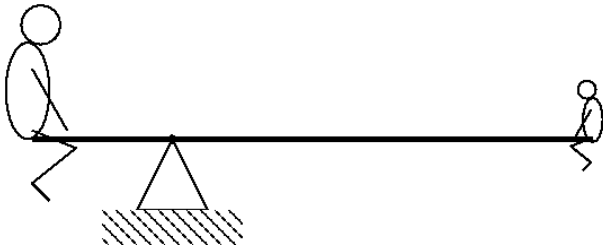
Die Kräfte an Körper 1 treffen sich im durch den Kreis hervorgehobenen Punkt, man darf sie addieren, und der Körper wird nach oben davonschweben.

Die Summe der an Körper 2 angreifenden Kräfte ist 0. Dennoch wird der Körper beginnen, sich im Uhrzeigersinn zu drehen.

**Ein Körper ist in Ruhe, wenn gilt:
Die Summe der einwirkenden Drehmomente ist 0.**

**Drehmoment = Kraft * Hebelarm * sin (eingeschlossenen Winkels).
Zur Bestimmung des Hebelarms muß man sich einen Bezugspunkt aussuchen. Welchen man nimmt, ist mathematisch egal; man wählt daher pfiffig.
Linksrund ist positiv, rechtsrund ist negativ.**

Beispiel Auf einer Wippe sitzen ein Vater und sein Kind, ohne zu wippen.



$$\text{Hebel1} = 1\text{m}$$

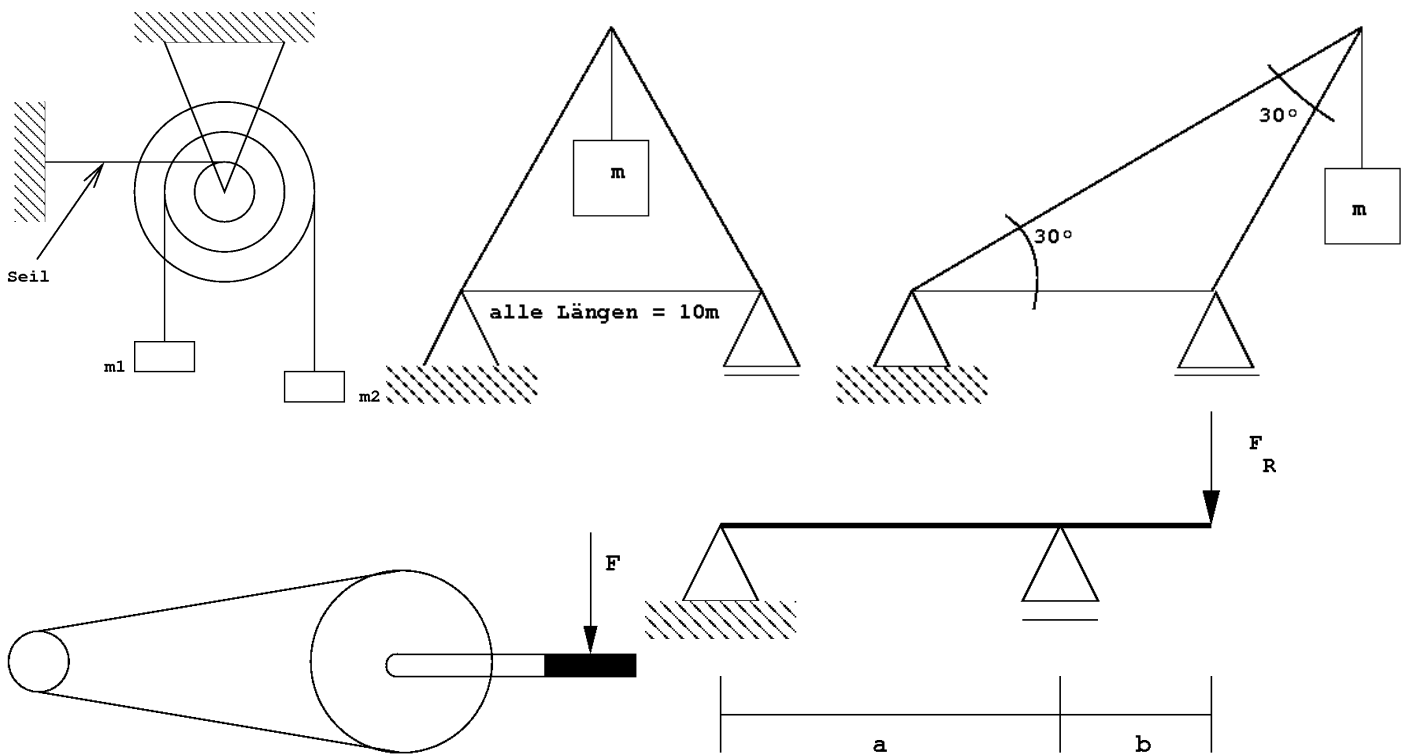
$$\text{Hebel2} = 3\text{m}$$

Schneiden Sie die Wippe frei. Berechnen Sie die Kraft am Drehpunkt der Wippe.

Berechnen Sie die Summe aller Drehmomente

- um den Sitzpunkt des Vaters
- um den Sitzpunkt des Kindes
- um den Drehpunkt
- um irgendeinen Punkt in der Zeichenebene.

8.1 Übung Drehmoment



8.1.1 Seilrolle

An einer dreifachen Seilrolle hängen 2 Gewichte. Bestimmen Sie die Seilkraft.
 $m_1 = m_2 = 10 \text{ kg}$, $r_1 = 10 \text{ cm}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$, $r_3 = 30 \text{ cm}$.

8.1.2 Fahrrad

Gegeben ist ein Fahrrad-Kettentrieb. Die horizontal stehende Kurbel ist mit dem Gewicht des Fahrers (70 kg) belastet.

\varnothing Vorderritzel = 190mm, \varnothing Hinterritzel = 80 mm, Kurbellänge = 180mm

- Berechnen Sie das Drehmoment an der Tretwelle.
- Berechnen Sie die Kettenkraft.
- Berechnen Sie das Drehmoment am hinteren Ritzel.

8.1.3 Kräne

Gegeben sind die nebenstehenden Kräne. Können Sie die Auflagerkräfte mittels einer Drehmomentbetrachtung berechnen?

8.1.4 Biegebalken

- Berechnen Sie die Auflagerkräfte allgemein für alle a , b , F_R .
- Berechnen Sie die Auflagerkräfte für $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F_R = 700 \text{ N}$.

9 Stabwerke

Wenn ein mechanisches System im Gleichgewicht ist, dann ist auch jedes Teilsystem dieses Systems im Gleichgewicht.

Praktikable Teilsysteme sind zB das Gesamtsystem ohne Auflager oder alle Knoten. Es empfiehlt sich, bei den Knoten mit Rechnen anzufangen, wo eine von drei Kräften bekannt ist.

10 Lineare Superposition

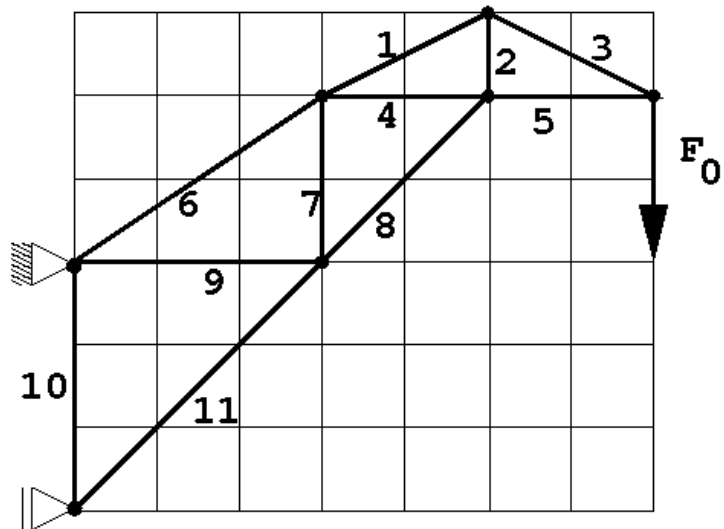
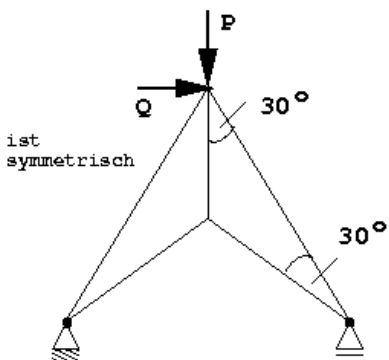
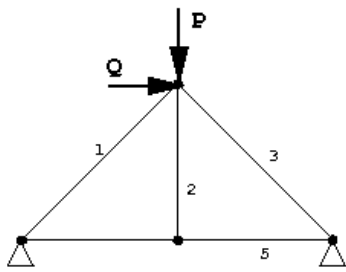
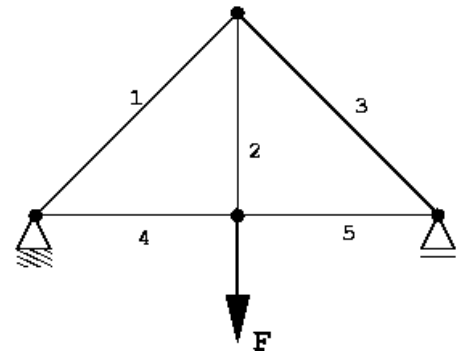
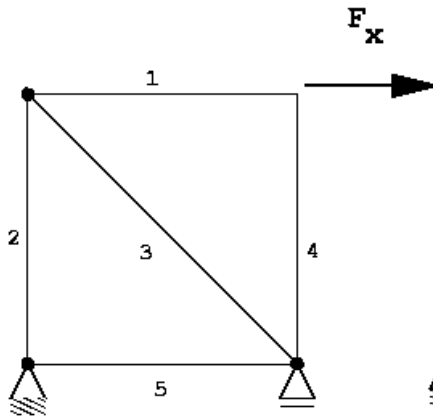
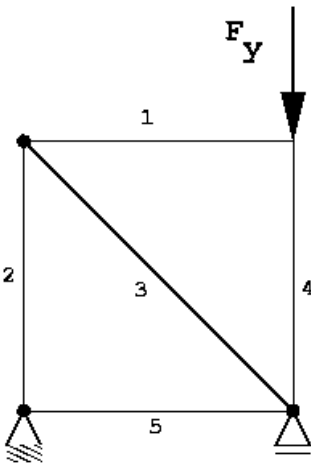
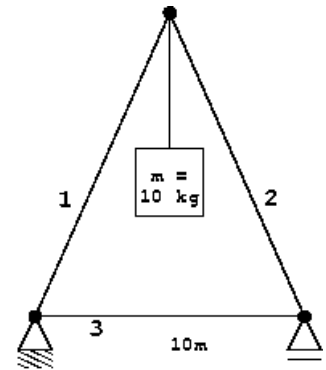
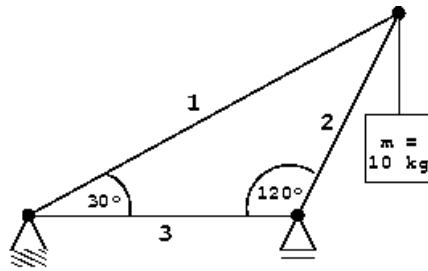
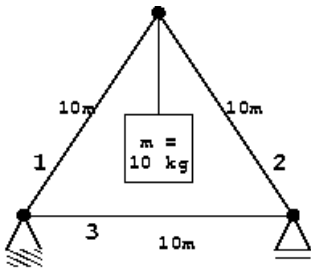
Lineare Superposition bedeutet: Überlagerung durch Addieren.

- 1. Man berechnet die Stabwerkskräfte für Fall P, indem man Q weglässt.**
- 2. Man berechnet die Stabwerkskräfte für Fall Q, indem man P weglässt.**
- 3. Die Gesamtbelastung ist dann die Summe der Einzelbelastungen.**

Man kann dies schön an den beiden Stabwerken mit Kräften P und Q demonstrieren (lassen).

10.1 Übungen Stabwerk

Berechnen Sie in den folgenden Aufgaben alle Stab- und Auflagerkräfte. Legen Sie vorher eine Tabelle an, in die Sie dann die Kräfte eintragen.



11 Ritter'scher Schnitt

11.1 Vorübung: Ein paar mathematische Betrachtungen

Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c gilt:¹

- $a^2 + b^2 = c^2$
- Die Höhe über der Hypotenuse h ist: $h = \frac{a*b}{c}$

Im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a gilt: $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Im Quadrat gilt: Diagonale $d = \sqrt{2}a$

In jedem Dreieck gilt der Sinussatz und der Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

¹Das bedeutet: es gilt in JEDEM rechtwinkligen Dreieck. Es gilt in Keinem Nicht-Rechtwinkligen Dreieck.

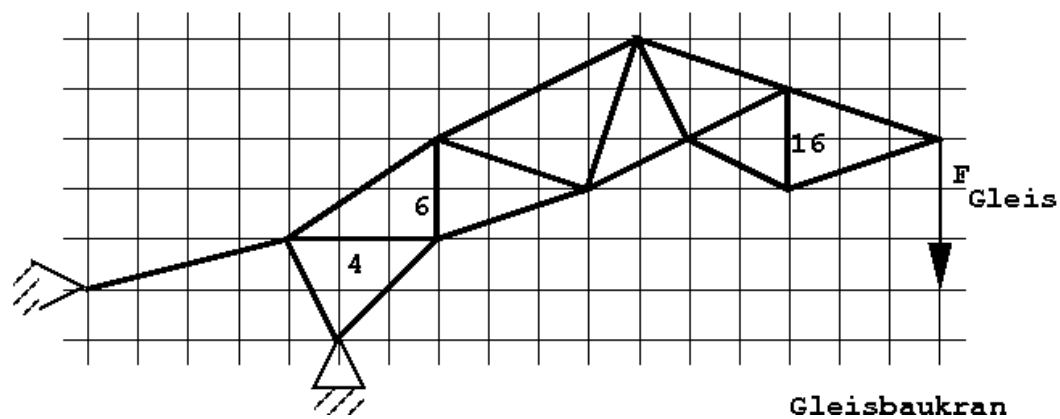
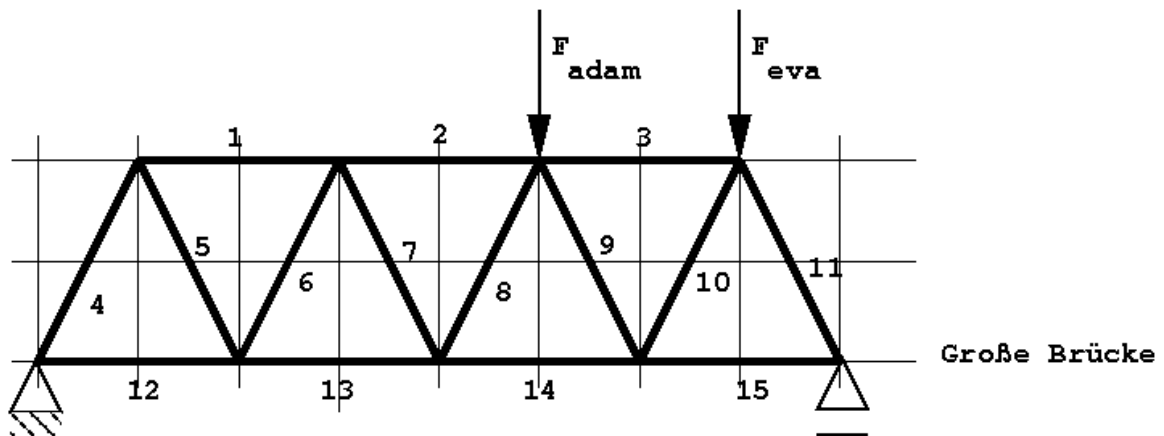
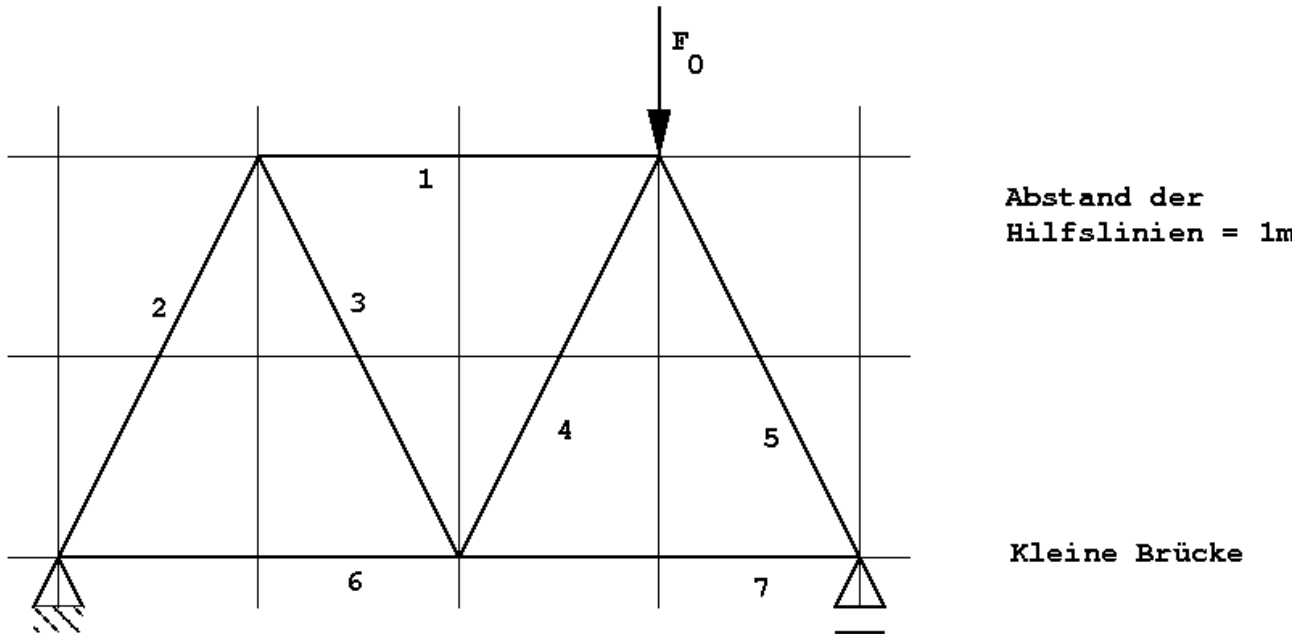
11.2 Kochrezept

Ritter'scher Schnitt: Kochrezept

1. System freischneiden;
2. Auflagerkräfte bestimmen;
3. In geschlossenem Linienzug durch max. 3 Stäbe schneiden;
Dabei soll der Linienzug drei unbekannte Stabkräfte und 1 bekannte Kraft umfassen.
4. Im folgenden nehmen wir an, Stab 1, 2 und 3 seien geschnitten.
Das wird fast nie wirklich passieren; es werden andere Nummern sein.
5. Zum Berechnen von Stab 1:
Schnittpunkt von Stab 2 und 3 grafisch ermitteln und $P_{2,3}$ nennen;
(Allgemein: zum Berechnen von einem Stab den Schnittpunkt der beiden anderen ermitteln, einzeichnen und mit Namen versehen.)
6. falls kein Schnittpunkt existiert: anders weiterrechnen;
7. Stab 1 berechnen über $\sum M^{(P_{2,3})} = 0$
Dabei soll man die Hebelarme sowohl grafisch aus der maßstäblichen Zeichnung als auch rechnerisch ermitteln.
(Allgemein: Die Kraft in einem Stab über $\sum M^{(P_{\text{Schnittpunkt-der-beiden-anderen-Staebe})}} = 0$ berechnen.)
8. Stab 2 über $P_{1,3}$ berechnen;
9. Stab 3 über $P_{1,2}$ berechnen.

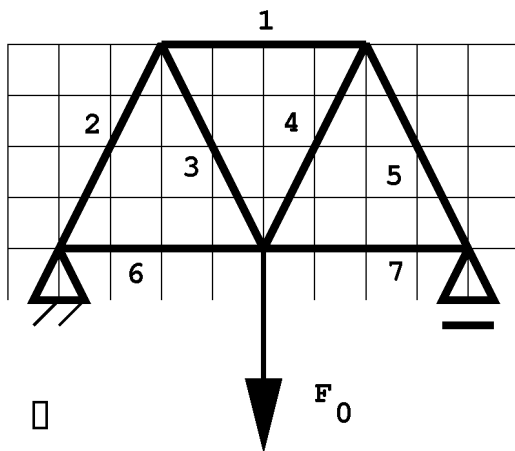
11.3 Übungen

Berechnen Sie in den folgenden Aufgaben alle Stab- und Auflagerkräfte. Legen Sie vorher eine Tabelle an, in die Sie dann die Kräfte eintragen.



12 Cremona-Plan [optional]

12.1 Einstiegsbeispiel



Gegeben ist das obige, symmetrische und symmetrisch belastete Stabwerk, das Ähnlichkeit mit einer Eisenbahnbrücke aufweist. $F_0 = 1000N$. Wir kennen bereits folgende Methoden, um alle Stabkräfte zu bestimmen:

- Ritter'scher Schnitt;
- Freischneiden aller Knoten. Anschließend hangeln wir uns von einem berechenbaren Knoten zum anderen.

Das geht grafisch oder rechnerisch.

Bei der zweiten Methode, grafische Version, müssen wir viele Knoten zeichnen und viele Wirklinien. Dabei zeichnen wir jede Kraft genaugenommen zweimal: einmal ziehend von ihrem einen Endpunkt, einmal vom anderen. Jeder Stab hat nämlich zwei Enden.

Der Cremona-Plan ist im Prinzip dasselbe, aber jede Kraft wird nur einmal gezeichnet.

12.2 Schreibweise

Die Vorzeichen der Kräfte sind nach wie vor wichtig. Deshalb werden wir sie oftmals eintragen:

- Zugstäbe bekommen ein + (Plus) an die Nummer geschrieben, Druckstäbe ein - (Minus), Nullstäbe ein o (Kreis).
- Genauso markieren wir die Kräfte.

(Diese Schreibweise wurde in 20 min von mir am Schreibtisch entwickelt, entspricht keiner Norm und wird vielleicht demnächst geändert.)

Die Punkte benennen wir nach den Kreuzungspunkten von Stäben. Der Angriffspunkt von F_0 heißt zB $P_{6,7}$ oder $P_{3,4}$.

12.3 Durchrechnen

Wir beginnen mit F_0 und zeichnen sie *sehr groß* auf ein Blatt Papier.

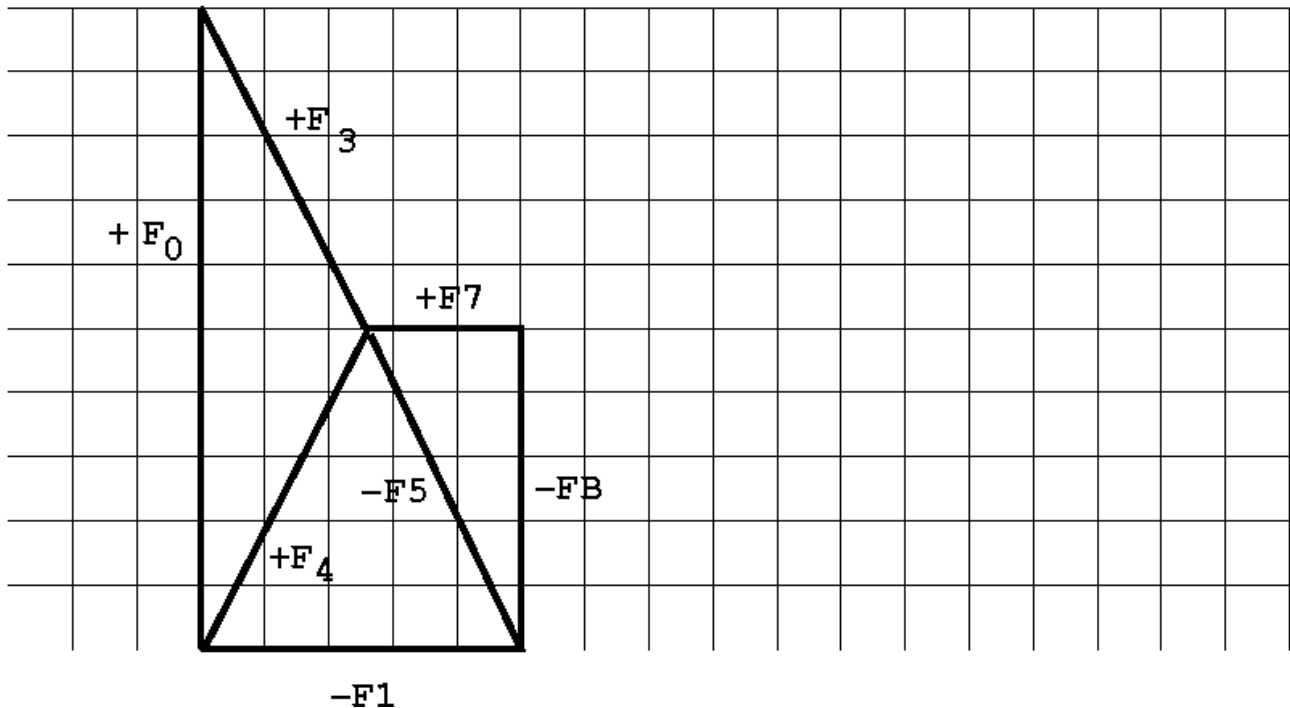
Da das Stabwerk symmetrisch und symmetrisch belastet ist, dürfen wir annehmen, daß $F_6 = F_7$, so daß F_0 ausschließlich von F_3 und F_4 aufgenommen wird. Damit können wir das erste Kräfte-Dreieck zeichnen.

Wenn wir uns $P_{3,4}$ freigeschnitten vorstellen, erkennen wir, daß F_3 und F_4 positiv sind. Durch F_4 können wir F_1 und F_5 zeichnen.

Wenn wir uns $P_{1,5}$ freigeschnitten vorstellen, erkennen wir, daß F_1 und F_5 negativ sind. Durch F_5 können wir F_7 und F_B zeichnen.

Wenn wir uns P_B freigeschnitten vorstellen, erkennen wir, daß F_7 positiv und F_B negativ ist.

F_B ergibt sich dabei übrigens zu $-\frac{F_0}{2}$, was ohne Zweifel richtig ist.



12.4 Manöverkritik: Startpunkt

Die obige Aufgabe ist nett, bis auf das Sehen der Symmetrie.

Die meisten Stabwerke sind ähnlich aufgebaut: eine obere Einhüllende, eine untere Einhüllende, und ein paar aussteifende Stäbe dazwischen.

Da man die Einhüllenden und die aussteifenden Stäbe in je einem Zug zeichnen kann², folgt:

Man kann jedes Stabwerk in einem Zug zeichnen.

Es wäre jedoch besser gewesen, an einem Schnittpunkt von drei Kräften anzufangen (statt, wie oben geschehen, mit fünf Kräften).

Als solche bieten sich *stets* die Lager an.

12.5 Manöverkritik: Mehr Belastungskräfte

Eisenbahnbrücken bestehen häufig aus mehr als 2 Fächern (= aufrecht stehenden Dreiecken). Wenn dann ein schwerer Güterzug draufsteht, wird die Brücke an *jedem* unteren Knoten mit einer (bekannten) Gewichtskraft belastet.

²Natürlich nur jedes statisch bestimmte.

Vorgehen Wir wollen daher das obige Beispiel nochmal durchrechnen, diesmal ausgehend vom rechten Auflager.

Aus der Summe aller Drehmomente um A erhalten wir F_B und erzeichnen daraus ohne Schwierigkeit F_7 und F_5 . Aus F_5 erhalten wir anschließend F_1 und F_4 .

Damit haben wir für $P_{3,4}$ drei bekannte Kräfte (F_0 , F_4 und F_7) und zwei unbekannte (F_3 und F_6). Wir müssen hier sehr aufpassen, daß wir $F_0 + F_4 + F_7$ vorzeichenrichtig zeichnerisch addieren, sonst rechnen wir mit falschen Werten für F_2 , F_3 und F_6 weiter.

Wir haben zum Glück (oder Unglück, wie man's nimmt) in F_A eine Probe.

Schluß Das soeben gezeigte Verfahren kann natürlich mehr als eine Belastungskraft einschließen, zB deren fünf.

12.6 Übung Cremona [optional]

13 Festigkeitslehre

Jedes Bauteil unterliegt äußeren Belastungen, denen es durch seine Größe und seine Werkstoffeigenschaften Widerstand leistet. Die Belastungen äußern sich als Normal-, Schub-, Biege- und Torsionsspannungen, häufig kombiniert.

13.1 Normalspannung

Definition: Normalspannung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Querschnittsflaeche}}$
Die Querschnittsfläche ist dabei senkrecht zur Kraft.

Das σ schreibe ich als eine 6 mit einem Schwänzchen daran, damit ich es von meiner 6 und meinem G unterscheiden kann.

**Zugspannungen erhalten positives Vorzeichen.
Druckspannungen erhalten negatives Vorzeichen.**

13.2 Normaldehnung

Jedes Bauteil wird unter Normalspannung länger (oder kürzer).

Definition: Dehnung $\epsilon = \frac{\text{Laengenaenderung}}{\text{Originallaenge}}$

13.3 Elastizitätsmodul

Im elastischen Bereich des Materials (also unterhalb R_e) bewirkt eine Zunahme der Spannung um Faktor x eine Zunahme der Dehnung um Faktor x .

Man sagt auch: Spannung und Dehnung sind proportional.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Dehnung ist der Elastizitätsmodul E .
Es gilt: $\sigma = E * \epsilon$

Man kann den E-Modul als die spezifische Steifigkeit des jeweiligen Werkstoffs verstehen.
Beispiele (in N/mm²) : St 210.000, GG 110.000, Al 70.000, Ti 120.000.

13.4 Übung Spannung und Dehnung

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle. Das Teil erleide eine Kraft von 10 kN und sei 1m lang.

Werkstoff	Gestalt	A [mm ²]	sigma [N/mm ²]	E [N/mm ²]	epsilon	epsilon	delta l
					[%]		[mm]
GGG 40	Durchm. 3						
TiAl6V4	7 x 1						
St50	U40						

13.5 Fundamentalgleichung der Konstruktionstechnik

Damit ein Bauteil hält, muß gelten:

$$\sigma_{real} \leq \sigma_{zul}$$

Eine Obergrenze für σ_{zul} ist R_e bzw. $R_{p0,2}$.

Die Belastung ist allerdings zusätzlich abhängig von

- Belastungsart (statisch, schwellend, wechselnd, stochastisch);
- Wärmebehandlung;
- Oberflächenbeschaffenheit;
- Größe.

Deshalb kann σ_{zul} gelegentlich auch weit unter R_e liegen.

14 Wärmedehnung - to be written (optional)

15 Querkraft und Schubspannung

Definition: Schubspannung $\tau = \frac{\text{Kraft}}{\text{Querschnittsflaeche}}$
Die Querschnittsfläche ist dabei PARALLEL zur Kraft.

15.1 Scherung

Das Bauteil wird unter Schubspannung geschert. Das Maß für die Verformung heißt Scherung γ .

Es entspricht der Abweichung eines, unbelastet rechtwinkligen, Quaders vom rechten Winkel.

15.2 Schubmodul

Der werkstoffspezifische Widerstand gegen Scherung heißt Schubmodul G .

Es gilt: $\tau = G * \gamma$

Wir werden gelegentlich Schubspannungen ausrechnen; aber γ und G zeige ich nur wegen der Symmetrie zu ϵ und E .

15.3 Wo Normalspannung ist... (optional)

Wo Normalspannung ist, ist stets auch Schubspannung.

Beispiel Bei einem durch Normalspannung belasteten Zylinder ist

- in der Querschnittsfläche Normalspannung;
- senkrecht zur Querschnittsfläche (= parallel zur neutralen Faser) überhaupt keine Spannung;
- unter 45° zu beiden Schubspannung.

Der Körper hat also letztlich zwei Möglichkeiten, den elastischen Bereich zu verlassen:

1. Normalspannung führt zum Versagen.

Wir erwarten eine Werkstofftrennung in der Normalspannungsebene mit geringer Verformung.

2. Schubspannung führt zum Versagen.

Wir erwarten eine VERFORMUNG unter 45° zur Krafrichtung. Dabei gleiten nur einzelne Atom-Schichten gegeneinander ab, aber das Werkstück bewahrt seinen Zusammenhalt.

Makroskopisch gesehen, wird es länger, dünner und matter.

Da die Atome durch Wandern von Versetzungen gegeneinander abgleiten und dieses Wandern neue Versetzungen erzeugt, ist das Werkstück irgendwann so vollgepackt mit Versetzungen, daß sich keine mehr rühren kann.

Dann kann sich auch nichts mehr verformen. Ergo wird das Werkstück letztlich aufgrund von Normalspannungen brechen.

Versetzungen und ihr Wandern geben Stahl und anderen Metallen die Zähigkeit.

Teilweises Blockieren der Versetzungen, zB durch Kaltverformung, feinverteilte Ausscheidung von Carbiden und Nitriden, zwangsgelösten Kohlenstoff etc, erhöht die Festigkeit und senkt die Zähigkeit.

Totales Blockieren oder Abwesenheit von Versetzungen macht jedes Material spröde.

16 Biegung

Einstiegs-Übung Gegeben sei ein horizontaler Balken 1000x100x100, dessen linke 200mm in eine Wand eingemauert sind und dessen rechtes Ende mit einem Gewicht von 100kg belastet werde. g sei $9,81 \frac{m}{s^2}$.

Sind Normalspannungen darin? - Nein.

Sind Schubspannungen darin? - Ja, 1000N auf 10000mm² = 0,1 N/mm². Nichts, was ihn umbringt.

Wo wird er kaputtgehen? - Na links, da wo er aus der Wand schaut.

Wie wird er dort belastet? -

An der Oberseite durch Zug. An der Unterseite durch Druck. In der Mitte überhaupt nicht (er dürfte auch hohl sein).

25mm von oben auch durch Zug, aber nur halbsostark wie an der oberen Oberfläche.

25mm von unten auch durch Druck, aber nur halbsostark wie an der unteren Oberfläche.

Wo wird er beginnen zu versagen? - An der Stelle mit der größten Normalspannung.

Warum gerade dort? - Weil dort das Biegemoment am größten ist.

Wie groß ist es denn? - Biegemoment = Kraft x Hebelarm = 1000N x 0,8m = 800Nm.

Wie groß ist es 300mm, 500mm, 800mm von der Wand weg? - (selber rechnen)

Das Biegemoment ist an jeder Stelle des Balkens anders. Wir nennen diesen Verlauf Biegemomentverlauf oder Biegemoment-Linie.

Zwischen zwei eingeleiteten Querkräften verläuft das Biegemoment linear.

Das Biegemoment kann an jeder Stelle des Balkens anders sein:

$$M_b = M_b(x)$$

Zur Orientierung der M_b -Achse gibt es zwei Möglichkeiten:

- Positiv nach oben - wie immer;
- Positiv nach unten - dann folgt die Biegemomentenlinie vom Vorzeichen her der erwarteten Biegelinie.

Meine Studierenden haben sich mit überwältigender Mehrheit für "Positiv - so wie immer" entschieden.

17 Biegespannung und Widerstandsmoment

Wie groß ist die Spannung an der empfindlichen Stelle?

Die empfindlichen Stellen unseres Balkens heißen "gefährdete Querschnitte".

Def.: W_b ist das Widerstandsmoment gegen Biegung. Es ergibt sich aus der Bauteil-Geometrie.

$$\sigma_{biege,max} = \frac{M_b}{W_b}$$

Es gibt auch ein Widerstandsmoment gegen Torsion namens W_p . Bitte nicht verwechseln.

17.1 Übung

Ein Balken erleidet an einer Stelle ein Biegemoment von 400Nm. $\sigma_{zul} = 235 \text{ N/mm}^2$.

Berechnen Sie die maximalen Biegespannungen und bestimmen Sie, ob σ_{zul} überschritten wird. Balkengeometrie:

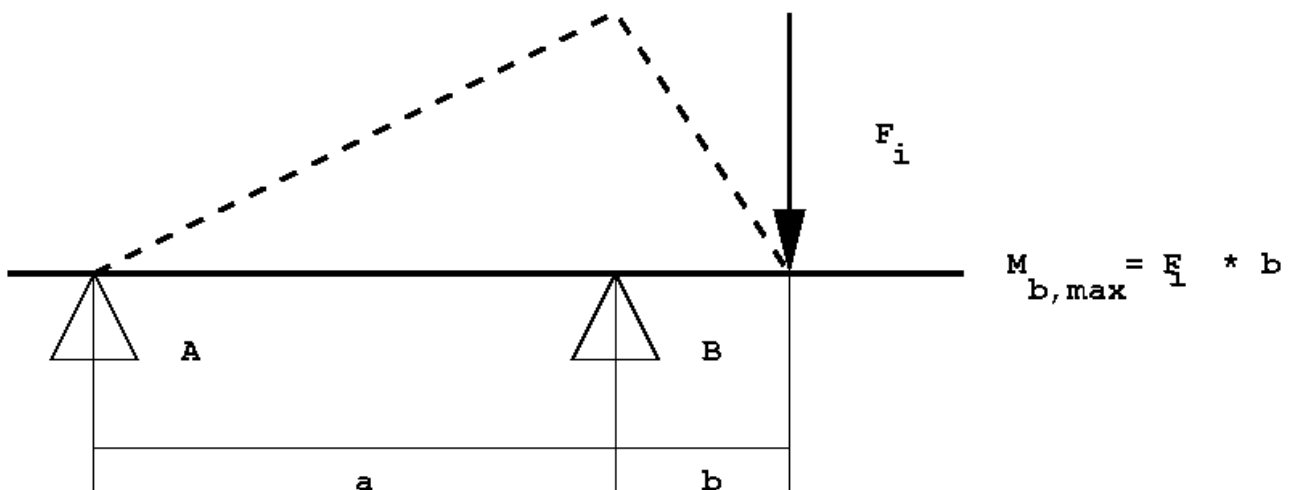
- a) Balken 10mm breit, 20mm hoch
- b) Balken 20mm breit, 10mm hoch
- c) Balken \varnothing 25mm
- d) Balken Außen- \varnothing 50mm, Innen- \varnothing 44mm

18 Biegemomenten-Linie durch Lineare Superposition

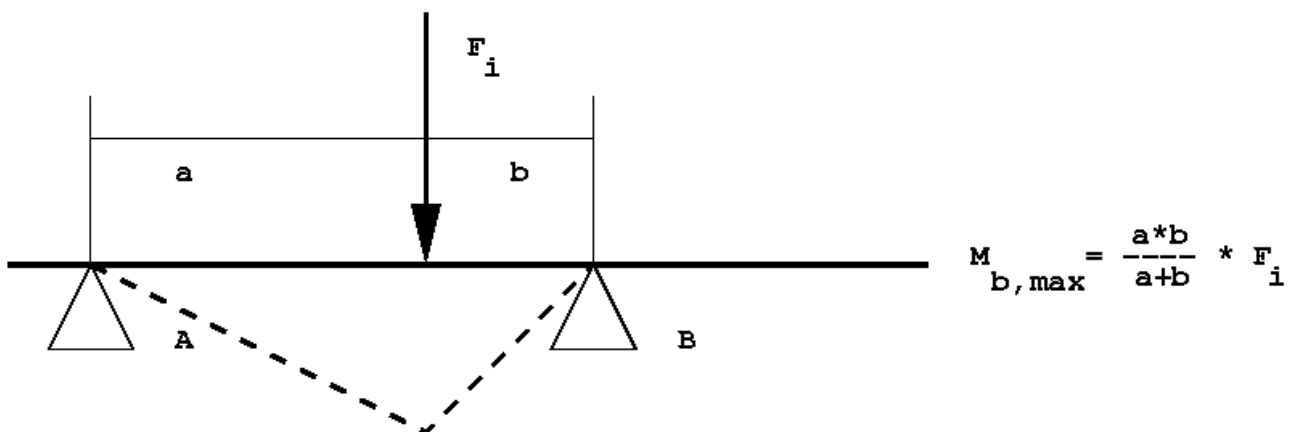
18.1 Kochrezept

1. Numerieren Sie alle Kräfte durch.
2. Basteln Sie für jede Kraft F_i die Biegemomentenlinie $M_{b,i}$.
Empfinden Sie dabei die Krümmungslinie des Balkens nach.
3. Addieren Sie alle Biegemomentenlinien zu M_b , und markieren Sie diese deutlich als Ergebnis.
4. Schreiben Sie an die Hochpunkte von M_b die Zahlenwerte, wahlweise in Nm oder Nmm.

18.2 Biegemoment-Grundfall 1 von 2



18.3 Biegemoment-Grundfall 2 von 2



19 Biegemomenten-Linie durch Freischneiden

Nun, da wir wissen, daß in einem Biegebalken Normalspannungen, Schubspannungen und Biegemomente unterwegs sind, können wir ihn an einer beliebigen Stelle freischneiden und die weggeworfene Hälfte durch ein unbekanntes Biegemoment, eine unbekannte Normalkraft und eine unbekannte Querkraft ersetzen.

Wie am Stab auch, müssen die Normalkräfte an beiden Schnittufern in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Die Querkräfte und die Biegemomente ebenfalls.

Am positiven (nach rechts schauenden) Schnittufer zeigt die Normalkraft nach rechts, die Querkraft nach unten, das Biegemoment im Uhrzeigersinn.

Am negative (nach links schauenden) Schnittufer zeigt die Normalkraft nach links, die Querkraft nach oben, das Biegemoment gegen den Uhrzeigersinn.

19.1 Übung

Wir beginnen mit einem Balken von 150mm Länge, gelagert bei 10 und 140mm lfd. Länge, mit einer Querkraft $P = 1\text{N}$ bei 100mm lfd. Länge.

Die Geometrie des Balkens tut nichts zur Sache - wir suchen nur das Biegemoment, nicht die Biegespannung.

Lösung s. nächste Seite.

19.2 Der Trick mit den Querkraftflächen

An jeder Stelle x des Balkens gilt:

$$\text{Biegemoment} = \sum(\text{Querkraft} * \text{Weg})$$

Beispiele Links vom linken Lager: keine Querkraft; Querkraft * Weg = 0; kein Biegemoment.

An F_0 : Querkraft = 0.308N; Querkraft * (Weg dieser Querkraft) = 0.308N * 90mm = 27.692 Nmm = Biegemoment.

Am rechten Lager: Wir haben 2 Querkraft-Rechtecke, nämlich 0.308N * 90mm - 0.692N * 40mm = 0Nmm; kein Biegemoment.

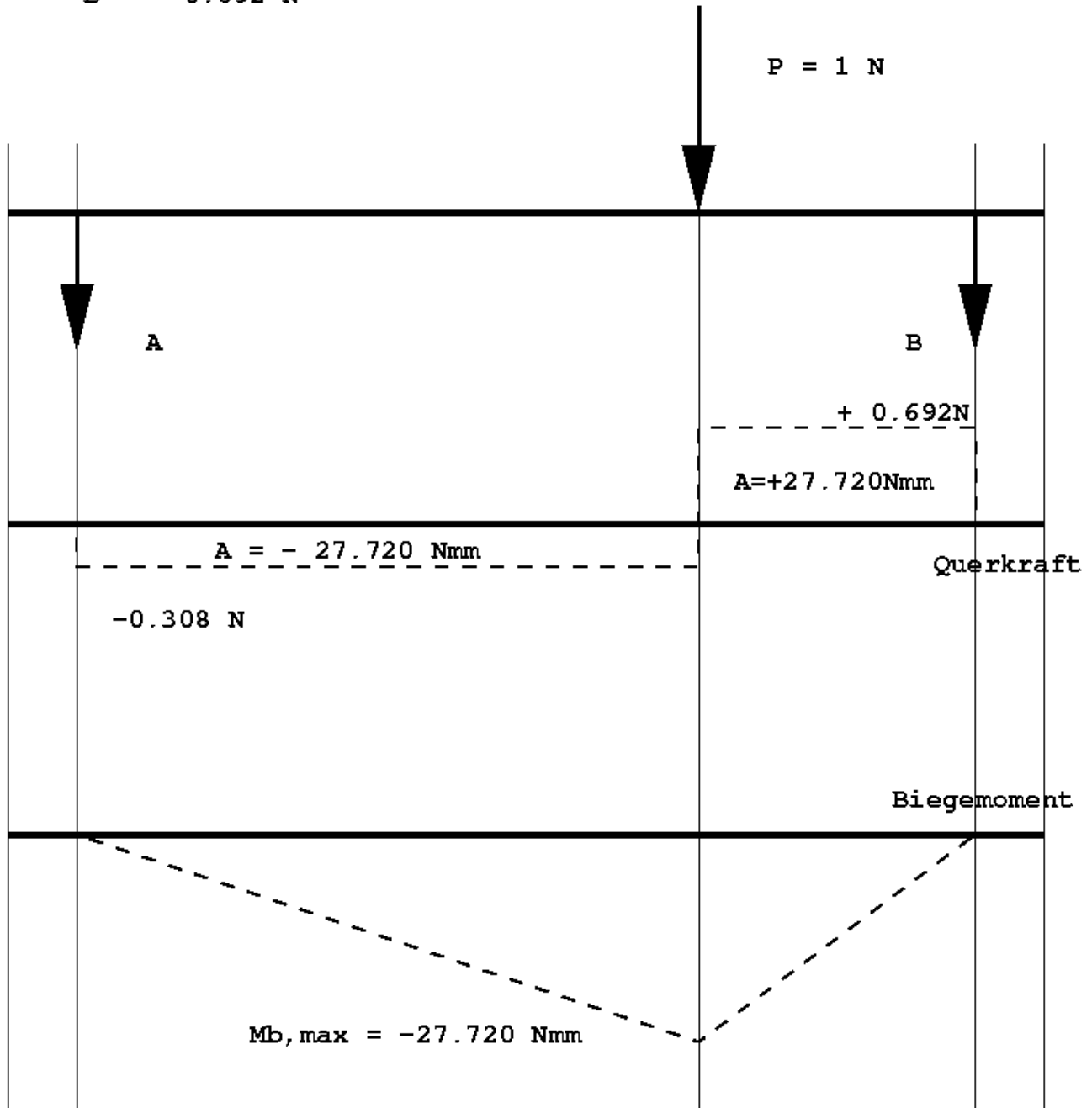
Man kann das für beliebige Stellen (zB $x=66.3\text{mm}$) vorturnen.

19.3 Lösung zur Übung

Gerechnet :

$$A = - 0.308 \text{ N}$$

$$B = - 0.692 \text{ N}$$



19.4 Übung Biegemomenten-Linien

Gegeben sind 6 Balken der Länge 130mm, mit Lager A 10mm von linken Ende entfernt, gemäß Aufgabe a) bis f).

Zeichnen Sie sie ab. Zeichnen, berechnen und beschriften Sie die Querkraft- und Biegemomentenverläufe.

- a) F nach oben bei 90mm, Lager B bei 120mm.
- b) F nach oben bei 100mm, Lager B bei 120mm.
- c) F nach oben bei 50mm, Lager B bei 120mm.
- d) F1 nach oben bei 50mm, F2 nach oben bei 90mm, Lager B bei 120mm.
- e) F1 nach unten bei 40mm, F2 nach oben bei 90mm, Lager B bei 120mm.
- f) F1 nach unten bei 50mm, Lager B bei 80mm, F2 nach unten bei 120mm.

20 Kerbwirkung

20.1 Wiederholung

Die Biegemoment sagt uns die Biegebelastung an einer bestimmten Stelle.
Die Geometrie des Bauteils muß dagegenhalten.

20.2 Fundamentalgleichung der Biegespannung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b * \beta_k * S}$$

Def.: W_b ist das Widerstandsmoment gegen Biegung.

Es beträgt zB. für

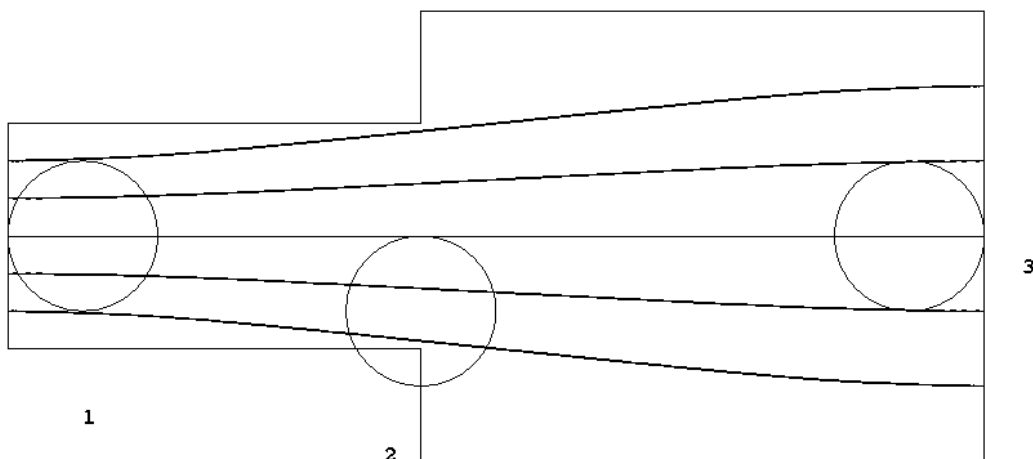
- Vollwellen: $\frac{\pi * d^3}{32}$;
- Rechtecke mit Höhe h und Breite b : $\frac{b * h^2}{6}$
- Hohlwellen: $\frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$

Def.: S ist der Sicherheitsfaktor. Sicherheitsfaktoren sind für viele Bereiche genormt. Sicherheitsfaktoren sind idR > 1 , außer im Flugzeugbau.

Def.: β_k ist der Kerbfaktor.

20.3 Kerbfaktoren

Wir verdeutlichen uns den Kraftverlauf durch einen abgesetzten Blechstreifen der konstanten Dicke t , der an beiden Enden gezogen wird:



Im Kreis 1 liegen die Kraftlinien dichter zusammen als im Kreis 3, d.h. dort ist die Spannung größer.

Am dichtesten zusammen liegen sie im Kreis 2. Hier ist die Spannung am größten. Sie ist sogar größer als die Spannung im Kreis 1!

Mittels FEM (Finite-Elemente-Methode) kann man die maximale Spannung berechnen. Wir überlassen das Rechnen aber anderen und gucken die Kerbfaktoren in Tabellen nach.

Die Kerbfaktoren hängen von der Geometrie des Bauteils (zB Querschnittsprung um Faktor 1.1 oder 3.4), der Belastung des Bauteils (zB Normalspannung, Schubspannung, Biegung oder Torsion) und dem Werkstoff ab.

Manche Werkstoffe sind kerbempfindlicher als andere. Manche erleiden nur eine kleine Kaltverformung und werden dabei fester. Andere entwickeln Risse, die lebenslang weiterwachsen.

Rißwachstum wird begünstigt durch

- schwellende oder gar wechselnde Belastung;
- hohe Temperaturen;
- chemischen Angriff.

20.4 Übung: Achse mit Kerbwirkung

Gegeben ist eine Achse:

- Durchm. 10mm von 0 bis 150mm;
- Durchm. 15mm von 30 bis 120 mm
- Durchm. 20mm von 60 bis 90 mm.

Die Achse wird durch eine senkrechte Kraft $F_0 = 1000N$ bei 70mm belastet. Die Lager sind bei 15mm und 135mm.

- a) Zeichnen Sie $F_Q(x)$ und $M_b(x)$.
- b) Zeichnen Sie $\sigma_b(x)$ unter Berücksichtigung der Kerbwirkung.
- c) Markieren Sie die gefährdeten Querschnitte.
- d) Formulieren Sie Fragen, anhand derer Sie gefährdete Querschnitte identifizieren können.
- e) Wählen Sie einen geeigneten Werkstoff für die Achse aus.

20.5 W_b

Berechnen Sie W_b für

- a) einen Querschnitt mit $b=10$ und $h=10$;
- b) denselben Querschnitt mit verdoppelter Breite;
- c) denselben Querschnitt mit verdoppelter Höhe.

21 Belastungsarten

Man unterscheidet 4 grundsätzliche Belastungsarten:

- statisch. $\sigma = const.$

Versagen (Bruch) kommt selten vor, außer es kommt Hitze oder Kälte und/oder chemischer Angriff dazu.

Als zulässige Spannung können wir idR R_m bzw. $R_{p0,2}$ verwenden.

- schwellend.

Es gibt eine obere und eine untere Spannung, die beide entweder größer oder kleiner 0 sind.

Man kann sich das vorstellen als eine statische Last, die von einer schwingenden überlagert wird.

Als zulässige Spannung können wir idR σ_{Sch} verwenden.

- schwingend. $\sigma_{max} * \sigma_{min} < 0.$

In der Technik ist häufig $\sigma_{max} = -\sigma_{min}.$

- real.

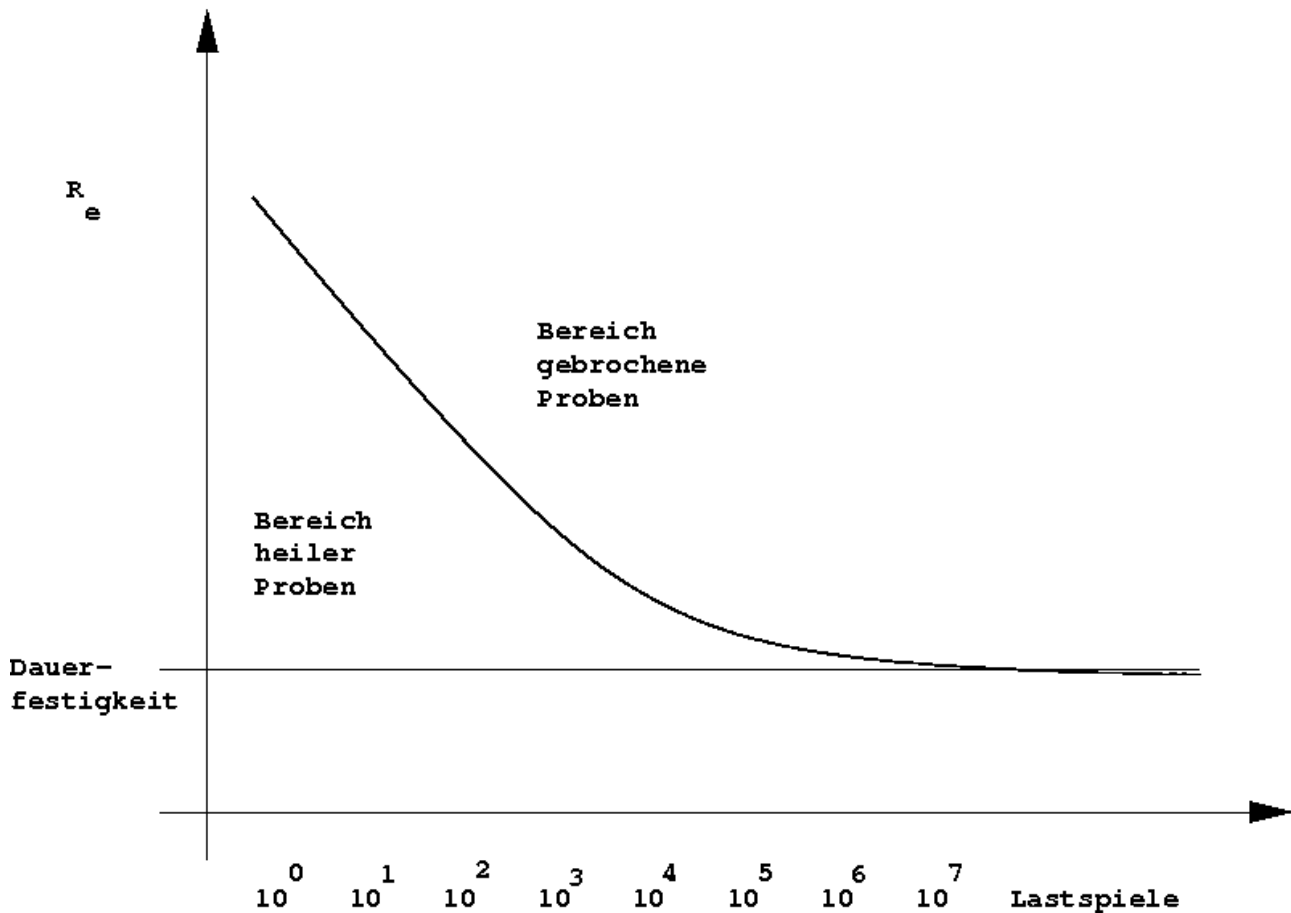
Ist eine stochastische Belastung, die zum Großteil der Zeit weit unter der zulässigen Spannung liegt. Zwischendurch treten kurze Überlastungen sowie Schläge auf.

Reale Belastungen sind so wenig erforscht, daß sie sich der Berechnung entziehen. Moderne Maschinen überwachen kritische Teile kontinuierlich selbst und signalisieren fällige Reparaturen und Wartungen, bevor ein Schaden zum Maschinenstillstand oder Verletzten und Toten geführt hat.

21.1 Dauerfestigkeit

Herr Wöhler hat das Versagensverhalten von Zug- und Biegeproben untersucht. Er unterwarf sie n-mal schwingender Belastung von zB $1 * R_e, 0.9 * R_e, 0.8 * R_e, 0.7 * R_e, \dots$

Im Wöhler-Diagramm mit logarithmischer Querachse trug er dann die Proben ein, die nicht versagt hatten:



Man sieht, daß alle Proben nach mehr als 10^6 Lastspielen eine gewisse Belastung aushalten. Diese wird **Dauerfestigkeit** genannt.

Dauerfestigkeit gilt nur bei Abwesenheit von Hitze, Kälte oder chemischem Angriff.

21.2 Übung: Belastung einer Welle

Stellen Sie sich eine Welle auf zwei Lagern vor, an der ein Gewicht hängt. Suchen Sie einen Punkt oben auf der Welle, und bestimmen Sie die Art der Biegespannung.

Drehen Sie die Welle anschließend dreimal um jeweils 90 Grad, und bestimmen Sie auch hier die Art der Biegespannung.

Welche Belastungsart liegt vor?

21.3 Übung: Wellenberechnung

Nehmen Sie an, die "Achse mit Kerbwirkung" sei eine Welle. Berechnen Sie sie erneut, und wählen Sie einen passenden Werkstoff aus.

22 Torsion

Wiederholung: Schubspannung $\tau = \frac{\text{Kraft}}{\text{QuerschnittsenkrechtzuKraft}}$.

Wellen sollen idR Torsionsmomente von einem Punkt zum anderen transportieren. Die Welle wird dabei tordiert (= gewrungen).

Das Torsionsmoment wird an einer Stelle durch Zahnräder, Treibriemen, Seilrollen, Kurbeltrieb etc. eingetragen und verläßt die Welle an anderer Stelle wieder.

Beispiele: Kurbelwelle am Fahrrad, Kurbelwelle und Kardanwelle am Auto, Vorgelegewelle. Die Welle erleidet dabei Schubspannungen. Diese sind besonders stark in den Außenbereichen. In der Mitte sind sie 0.

(Man dürfte die meisten Wellen hohl machen - dann wiegen sie noch 50 % und leisten 90 %.)

$$\tau_t = \frac{\text{Torsionsmoment } M_p}{\text{polares Widerstandsmoment } W_p}$$

Auch Torsion kennt Kerbwirkungszahlen β_k .

22.1 Übung: Tordierte Welle

Nehmen Sie die "Achse mit Kerbwirkung" und entfernen Sie die Querkraft.

Nehmen Sie nun an, bei 20mm wird ein Torsionsmoment eingebracht, das die Welle bei 105 mm wieder verläßt.

a) statisch: 100Nm

b) schwingend: 60Nm

Berechnen und zeichnen Sie jeweils $M_t(x)$ und $\tau_t(x)$.

23 Kräfte im Zahnradtrieb

23.1 Umfangskräfte

Zahnräder übertragen Leistung.

Sie wandeln dabei Drehzahlen und Drehmomente im Verhältnis der Zähnezahlen.

Am größeren Zahnrad sind die größeren Momente und die kleineren Drehzahlen.

In der Technik treiben hochdrehende, kleine Maschinen häufig langsamdrehende Maschinen. Die meisten Übersetzungen gehen ins Langsame.

Das kleine, antreibende Zahnrad wird oft Ritzel genannt, das große Rad.

In ölgeschmierten Getrieben darf man einen Wirkungsgrad von 1.00 annehmen.

$$P = M * \omega$$

Def.: Kreisfrequenz $\omega = 2 * \pi * \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{sec}}$

$$v = r * \omega$$

Def.: Bahngeschwindigkeit v , Radius r .

23.2 Normalkräfte

Damit auch bei kleinen Zahnrädern der Zahngrund dicker ist als die Zahnspitze, werden Verzahnungen mit einem Flankenwinkel von 20 Grad hergestellt.

Ein Zahnradtrieb verursacht daher neben der (tangentialen) Umfangskraft immer auch eine Radialkraft, die auf die Welle drückt:

$$F_{\text{radial}} = \tan(20\text{Grad}) * F_{\text{umfang}}$$

23.3 Übung Zahnräder 1

23.3.1 Radsatz

In einem Motorrad treibt das Ritzel auf der Kurbelwelle das Rad auf dem Kupplungskorb an.

Das Ritzel hat einen eff. Durchm. von 40mm, das Rad von 210mm.

Die Kurbelwelle liefert 20 kW bei 7500 rpm (rotations per minute).

Berechnen Sie beide Drehmomente sowie Drehzahl und Leistung des Rades.

23.3.2 Hinterrad

Das Hinterrad des o.g. Motorrades hat einem Umfang von 2m. Das Motorrad fährt 150 km/h. Das Kettenrad des Motorrades hat einen eff. Durchmesser von 300mm.

- Berechnen Sie Drehzahl und Drehmoment des Hinterrades.
- Berechnen Sie die Vortriebskraft, die auf das Motorrad wirkt.
- Berechnen Sie die Kettenkraft im Last-Trumm und die Kettengeschwindigkeit.
- Berechnen Sie Kettenkraft * Kettengeschwindigkeit.

23.3.3 Fahrrad

Ein Fahrradfahrer möchte bei 40 km/h 90mal pro Minute in die Pedale treten. Der Durchmesser des Hinterrades ist 700mm. Die Kurbeln sind 170mm lang.

- Warum will der Fahrradfahrer so hohe Drehzahlen treten?
- Wie viele Zähne sollte das hintere Ritzel haben, wenn vorne 52 Zähne sind?

24 Kombinierte Belastung

Beispiel

Eine Vorgelegewelle ist Durchm. 20 von 0 bis 150mm, Durchm. 26 von 20 bis 130mm, Durchm. 32 von 50 bis 100mm.

Sie ist links und rechts gelagert durch je ein Rillenkugellager 20x12x12, das durch einen Seegerring gehalten wird.

Es sind zwei Zahnräder mit je einer Paßfeder aufgezogen, die von Seegerringen gehalten werden. Das große hat eine Nabellänge von 20mm, das kleine von 10mm.

Das große hat einen eff. Durchm. von 100mm, das kleine von 57mm.

Die Seegerringe sitzen in 2mm tiefen Nuten.

Die Welle überträgt 20kW bei $n=2000 \text{ min}^{-1}$.

24.1 Addieren von Normal- und Schubspannung

Die Welle unterliegt keinen Normalkräften, aber Schub, Biegung und Torsion. Jede Spannungsart hat dabei ihre eigenen Kerbwirkungszahlen.

Maximale Biegespannungen darf man vorzeichenrichtig addieren. (Maximale) Schubspannungen darf man vorzeichenrichtig addieren.

Normal- und Schubspannungen addiert man zu einer Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_n^2 + \alpha_0^2 * \tau^2}$$

α_0 ist dabei das "Anstrengungsverhältnis". α_0 ist werkstoffabhängig. Wir verwenden 0,7.

Damit die Welle hält, muß gelten:

$$\sigma_V > \sigma_{zul} * S$$

24.2 Übung: Vorgelegewelle

Eine Vorgelegewelle ist Durchm. 20 von 0 bis 150mm, Durchm. 26 von 20 bis 130mm, Durchm. 32 von 50 bis 100mm.

Sie ist links und rechts gelagert durch je ein Rillenkugellager 20x12x12, das durch einen Seegerring gehalten wird.

Es sind zwei Zahnräder mit je einer Paßfeder aufgezo-gen, die von Seegerringen gehalten werden. Das große hat eine Nabenlänge von 20mm, das kleine von 10mm.

Das große hat einen eff. Durchm. von 100mm, das kleine von 57mm.

Die Seegerringe sitzen in 2mm tiefen Nuten.

Die Welle überträgt 20kW bei $n=2000 \text{ min}^{-1}$.

Die anderen Zahnräder sitzen senkrecht über der Vorgelegewelle. Sicherheit $S = 1,3$.

Zeichnen Sie zu der o.g. Welle die Diagramme für F_Q , M_b , σ_b in der Frontansicht und Draufsicht, M_t und τ_t . Machen Sie den Rchenweg deutlich, und beschriften Sie die Diagramme vollständig.

Berechnen Sie die Lager-Gesamtkräfte.

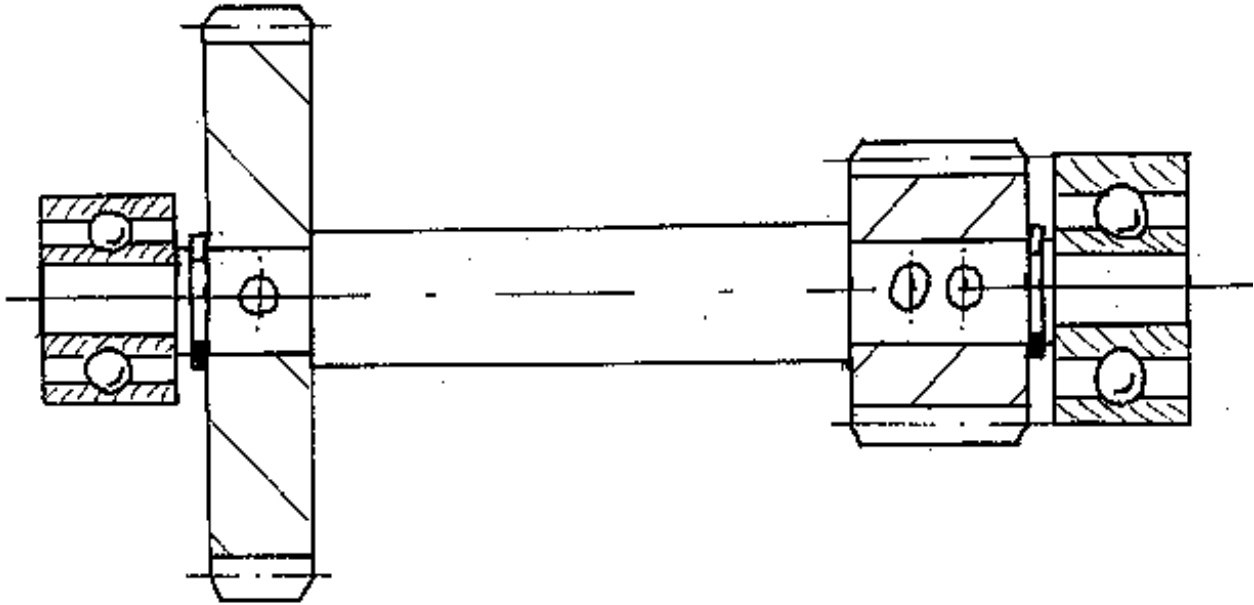
Addieren Sie anschließend die Biegemomente und anschließend die Biegespannungen quadratisch.

Berechnen und zeichnen Sie σ_V

Wählen Sie einen passenden Werkstoff aus.

25 Berechnung einer Vorgelegewelle

Suchen Sie den passenden Werkstoff für eine Vorgelegewelle.



25.1 Getriebe

Die V-Welle sitzt in einem Getriebe mit insgesamt drei Wellen. Links oben ist die Eingangswelle, links und rechts gelagert, mit einem kleinen Zahnrad darauf.

Unten ist die Vorgelegewelle, links und rechts gelagert. Links sitzt das große, rechts sitzt das kleine Zahnrad. Das kleine ist etwas breiter, weil befürchtet wird, daß die Drehmomente dort größer sind.

Die Ausgangswelle mit einem großen Zahnrad sitzt rechts oben.

25.2 V-Welle

0mm	Wellenanfang, Durchm. = 10mm
10mm	Mitte des linken Kugellagers
20mm	Absatz: Durchm. = 15mm
23mm	Mitte eines 2mm breiten Seegerringes, der Zahnrad(2) hält
32mm	Mitte eines 7mm Durchm. Spannstiftes. Mitte des linken Zahnrades.
40mm	Absatz: Durchm. = 20mm
120mm	Absatz: Durchm. = 15mm. Linker Rand von Zahnrad(3)
129 und 137 mm	2 Spannstifte Durchm. 7mm
146mm	rechter Rand von Zahnrad (3)
147mm	Mitte von Seegerring
150mm	Absatz: Durchm. = 10mm
160mm	Mitte des rechten Kugellagers
170mm	Wellenende

25.3 Verschiedenste techn. Daten

Eingangs-Leistung = s. Tabelle

Sicherheitsfaktor $S = 1,3$

Drehzahl an Eingangswelle: 1450 min(-1)

alle Wirkungsgrade = 100 %

Übersetzungen = 2mal 13 Zähne : 27 Zähne
bei einem Wellenabstand von 60mm

Kerbfaktor Querbohrung = 1,6

Kerbfaktor Absatz Biegung = 1,7

Kerbfaktor Absatz Torsion = 1,5

Kerbfaktor Seegerring = 3,5

Die Kerbwirkungen sind so weit voneinander entfernt, daß sie sich nicht gegenseitig beeinflussen.

25.4 Vorgehen

Machen Sie bei jeder Möglichkeit eine Probe, zB: $hans + franz + fritz = 0,0001 Nmm^2 \rightarrow o.k.$

- Zeichnen Sie die Welle 1:1.
- Berechnen Sie Zahnkräfte, Momente und Wellendrehzahlen.
- Berechnen und zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf der Frontansicht, Index v wie vorne.
- Berechnen und zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf der Draufsicht, Index o wie oben.
- Berechnen und zeichnen Sie den gesamten Biegemomentenverlauf, Index ges wie gesamt.
- Berechnen und zeichnen Sie den Torsionsmomentverlauf.
- Identifizieren Sie gefährdete Querschnitte.
- Berechnen Sie die Vergleichsspannungen für 2 gefährdete Querschnitte.
- Wählen Sie Ihren Werkstoff, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
- Numerieren Sie die Seiten.
Falls Sie später eine Seite einfügen wollen, akzeptiere ich "Seite 2a", Seite "2b", etc.
- Legen Sie ein Deckblatt mit wichtigen Meta-Informationen an:
Lehrer Schule MeinName Datum Fach Thema Schultyp Abstract
Inhaltsverzeichnis ohne Kapitelnummern oder Seitenzahlen
- Packen Sie das ganze in einen Schnellhefter.
- Geben Sie's pünktlich ab.

26 Reibung - to be written

Reibung kennen wir in erster Linie als etwas, das den Wirkungsgrad senkt.

Beispiel: Ein Benzin-Motor, der 90 kW mechanische Leistung bereitstellt, erzeugt gleichzeitig 30 kW thermodynamische Verluste und 30 kW Reibungsverluste (die sich anschließend selbstverständlich auch in Wärme verwandeln). Er muß also 180 kW Wärme wegkühlen – wegschmeißen – und verbraucht zum Umwälzen des Wassers Energie dabei.

Reibung macht aber auch manche Sachen erst möglich: Anfahren, bremsen (an Belag und Straße), Kurvenfahren, zu Fuß gehen, Preßpassungen und andere kraftschlüssige Verbindungen incl. Schrauben, Nicht-Wandern von Reifen auf der Felge, etc.

26.1 μ and μ_0

Wir machen ein paar merkwürdige Experimente:

- Verschieben eines Tafelschwamms auf dem Tisch, auf dem Koffer, auf dem 1-m-Lineal;
- hochkant, querkant, flach;
- mit Kreidedöschen oder anderem Gewicht obendrauf;
- Verschieben eines Stückes Kreide dito.

**Die Größe der Reibkraft ist abhängig von den Reibpartnern und der Normalkraft.
Sie ist unabhängig von der Reibfläche.**

26.1.1 Quantitative Bestimmung der Reibkraft

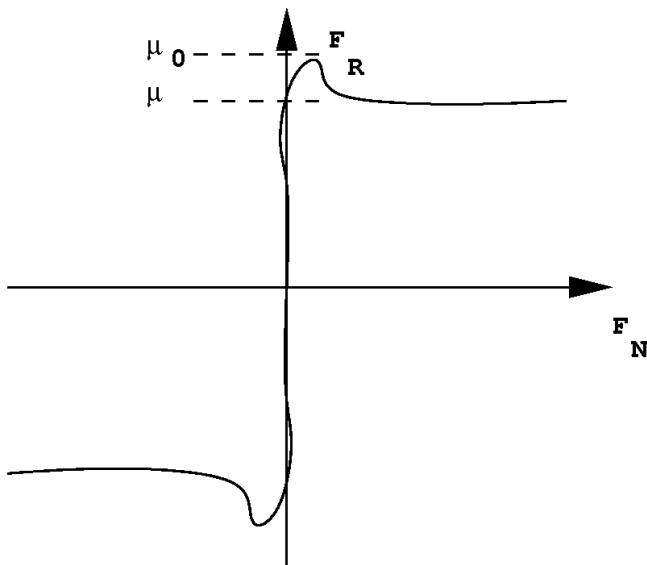
Versuchsaufbau: Kreide oder Schwamm auf Lineal legen und Lineal kippen, bis Teil anfängt zu rutschen, bestimmt μ_0 .

Teil anschubsen und schauen, wann es von alleine weiterrutscht. Bestimmt μ .

$$F_R = \mu_{(0)} * F_N$$

$$\mu_0 > \mu$$

Man erklärt dies durch die Verhakung winziger Oberflächenunebenheiten.



26.2 Reibkegel

Wann immer ich den Schwamm seitlich wegziehe, wirken auf ihn zwei Kräfte: die Zugkraft, die ihn wegzieht, und die Reibkraft, die ihn zurückhält.

Wenn die Summe der angreifenden Kräfte im Reibkegel bleibt, bleibt der Schwamm liegen. Der Kegelwinkel ist

$$\phi = \arctan \mu_0$$

26.3 Übung: Hausmeister

Der Hausmeister ($m=75$ kg) repariert außen am Haus im 2. Stock ein Fenster. Er steht dabei ganz oben auf einer 10 m langen Leiter ($m=20$ kg).

Die Füße der Leiter sind mit altem, sprödem, glitschigem Kunststoff armiert und stehen auf regenfeuchtem Asphalt ($\mu=0,2$).

- Beschreiben Sie, was passiert, wenn die Reibung nicht ausreicht.
- Berechnen Sie den benötigten Leiterwinkel. Reichen 75° ?
- Beschreiben Sie weitere Maßnahmen, die das Überleben des Hausmeisters wahrscheinlicher machen.

27 Kreisbeschleunigung (optional)

Hier auf der Erde stört die Gravitation unsere Betrachtungen, also begeben wir uns in Gedanken in den Weltraum.

27.1 Weltraum

1. Wie verhält sich ein Körper im Weltraum mit $v=0$?
2. ... mit $v>0$?
3. Was ist die natürliche Bahn eines Körpers, auf den keine Kraft wirkt?
4. Wie überrede ich den Körper, eine Linkskurve von 90 Grad zu fliegen, ohne daß er schneller oder langsamer wird?
5. Wo im Weltraum ist links?
6. Ein böser Mensch bindet im Weltraum zwei Massen mittels einer 1 m langen Schnur zusammen und gibt dem ganzen einen Schubs, so daß es langsam rotiert.
 - a) Welche Art Kraft herrscht zwischen den beiden Massen?
 - b) Um welchen Punkt rotiert das, wenn die Massen gleich schwer / verschieden schwer sind?
7. Ein anderer böser Mensch läßt einen ungekapselten Elektromotor mit sehr, sehr hohen Drehzahlen laufen, bis er auseinanderfliegt.
 - a) Wieso fliegt er auseinander?
 - b) Welche Bahnkurven beschreiben die Trümmer?

Wo ein Massepunkt in einer Kreisbewegung ist, ...

... da ist eine Kraft, die ihn Richtung Dreh-Mittelpunkt zieht.

... da ist eine Drehzahl n (Umläufe pro Sekunde/Minute/Jahr...).

... da ist eine Bahngeschwindigkeit

$$v = \text{Umlaeufe} * n$$

... da ist eine Drehfrequenz

$$f = n$$

... da ist eine Winkelgeschwindigkeit [Einheit: sec^{-1} oder $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$]

$$\omega = 2 * \pi * f$$

... da ist eine zum Drehzentrum gerichtete Kreisbeschleunigung

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 * r$$

... da ist eine Zentripetalkraft

$$F_Z = a * m$$

27.2 Übungen Kreis

27.2.1 Karussell

Auf einem Karussell mit 3m Durchmesser fährt ein Lehrer 1mal pro Sekunde im Kreis. Berechnen Sie Bahngeschwindigkeit, Drehzahl (in min^{-1}) und Drehfrequenz. Berechnen Sie Kreisbeschleunigung und Gesamt-Beschleunigung.

27.2.2 Autobahn

Ein Auto fährt eine Linkskurve. Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit.

a) $r=10\text{m}$, $\mu_0 = 1$ (trockener Asphalt).

b) $r=500\text{m}$, $\mu_0 = 0,5$ (nasse Autobahn).

27.2.3 Schaukel

Ein Karussell mit horizontaler Achse hat einen Durchmesser von 30m. Berechnen Sie Drehzahl und Bahngeschwindigkeit für den Fall, daß im oberen Scheitelpunkt Schwerelosigkeit herrscht.

27.3 Geostationäre Bahn

Geostationäre Satelliten schweben stets über demselben Punkt der Erdoberfläche. Sie fallen dabei kontinuierlich um die Erde drumherum. Die Erde hat einen Umfang von 40000 km (definitionsgemäß).

Übung Eine Kanonenkugel ($m=20\text{kg}$) fliegt in einem evakuierten Kanal in 10m Höhe immer um die Erde herum. Berechnen Sie v und Umlaufdauer.

(Lösung: ca. 8000 m/s. Ca. 1,5 h.)

Das funktioniert nur bei Bahnen über dem Äquator.

Die Erdbeschleunigung nimmt außerhalb der Erde quadratisch ab. Beispiel: In $R = 2r$ Entfernung ist sie nur noch $\frac{1}{4}$ derer an der Oberfläche.

$$a_{Erde} = g * \frac{r^2}{R^2}$$

Damit sinkt die Bahngeschwindigkeit um $\sqrt{2}$, die Umlaufdauer steigt um $\sqrt{2}$.

Damit kann man den Bahnradius einer Bahn mit $n = 1\text{Tag}^{-1}$ ausrechnen und kommt auf ca. 42000 km, d.h. ca. 35000 km über der Erdoberfläche.